Ce corrigé peut contenir des erreurs. Merci de nous les signaler : anne_redoute@yahoo.fr

FONCTIONS

Exercice 1 (fonction polynôme)

1) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

2) Pour tout réel x, $\boxed{f'(x) = 12x^2 - 18x - 12} = 6(2x+1)(x-2)$

La fonction f' est une fonction trinôme du second degré qui admet deux racines $-\frac{1}{2}$ et 2. $a = 12 > 0$ donc

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et $\left[2\,;\,+\infty\right[$ et f est décroissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
variations de f		$\nearrow$	$\frac{85}{4}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	

Exercice 2 (fonction rationnelle)

1)

a) f est définie, pour tout réel x tel que $4x + 4 \neq 0$ donc son ensemble de définition est $\boxed{D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}}$.

b) f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{(2x+9)(4x+4) - 4(x^2+9x+12)}{(4x+4)^2} = \boxed{\dfrac{4x^2+8x-12}{(4x+4)^2}}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $(4x+4)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2 + 8x - 12$ qui est un trinôme du second degré admettant -3 et 1 comme racines avec $a = 4 > 0$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc f est croissante sur les intervalles $\left]-\infty\,;-3\right]$ et $\left[1\,;\,+\infty\right[$ et

f est décroissante sur les intervalles $\left[-3\,;\,-1\right[$ et $\left]-1\,;\,1\right]$.

On en déduit le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-3		-1		1		∞
variations de f		$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{11}{4}$	$\nearrow$	

2)

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\dfrac{x}{4} + 2 + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x(x+1) + 8(x+1) + 4}{4(x+1)} = \dfrac{x^2+9x+12}{4x+4} = f(x)$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\},\ f(x) = \frac{x}{4} + 2 + \frac{1}{x+1}}$

b) Pour étudier la position relative de C et Δ, on étudie le signe de $G(x) = f(x) - \left(\frac{x}{4} + 2\right) = \frac{1}{x+1}$ sur D_f.

Si $x < -1$, $G(x) \leq 0$ donc $\boxed{C \text{ est en dessous de } \Delta \text{ sur }]-\infty\ ;\ -1[}$

Si $x > -1$, $G(x) \geq 0$ donc $\boxed{C \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]-1\ ;\ +\infty[}$

Exercice 3 (fonction paire)

1) ▸ $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \in \mathbb{R}$

▸ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^2 - 8 = x^2 - 8 = f(x)$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$.

2) $-7 \in D_g$ mais $7 \notin D_g$ donc $\boxed{\text{la fonction } g \text{ n'est pas paire}}$.

3) Soit f et g deux fonctions paires définies sur le même ensemble D.yant le même ensemble de définition D

▸ $\forall x \in D,\ -x \in D$ (car f et g sont paires)

▸ $\forall x \in D,\ (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ (car f et g sont paires)

Donc $f+g$ est paire.

Donc $\boxed{\text{la somme de deux fonctions paires ayant le même ensemble de définition } D \text{ est paire}}$.

SUITES

Exercice 4 (suite définie par une relation de récurrence)

1)

Etapes	n	u
Initialisation	3	6
$k = 1$	3	$3 \times 6 - 2 = 16$
$k = 2$	3	$3 \times 16 - 2 = 46$
$k = 3$	3	$3 \times 46 - 2 = 136$

$\boxed{\text{La valeur affichée par cet algorithme lorsque l'on choisit } n = 3 \text{ est } 136}$.

2)

a) $u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 6 - 2 = \boxed{16}$

$\boxed{u_2 = 46}$

$\boxed{u_3 = 136}$

b) On a $u_1 - u_0 = 16 - 6 = 10$ et $u_2 - u_1 = 46 - 16 = 30$

Ainsi $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

On a $\frac{u_1}{u_0} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{46}{16} = \frac{23}{8}$

Ainsi $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1$

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 3u_n - 3 = 3(u_n - 1) = 3v_n$.

Donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est la suite géométrique de premier terme } v_0 = 5 \text{ et de raison } q = 3}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 5 \times 3^n}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n = 1 + v_n \Leftrightarrow \boxed{u_n = 1 + 5 \times 3^n}$

c) Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ avec $q > 1$ et de premier terme $v_0 = 5$ avec $v_0 > 0$ alors $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty}$ donc, par limite de somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$

d)

Variables	u nombre réel ; n, p nombres entiers
Entrée	Saisir p
Initialisation	u prend la valeur 6
	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $u \leq 10^p$ faire
	u prend la valeur $3u - 2$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin boucle tant que
Sortie	Afficher n

4)

a)

Variables	S nombre réel ; i et n nombres entiers
Entrée	Saisir n
Initialisation	S prend la valeur 0
Traitement	Pour i allant de 0 à n
	S prend la valeur $S + 5 \times 3^i$
	Fin boucle pour
Sortie	Afficher S

b) Pour tout entier naturel n :

$S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = 5 \times \frac{(3^{n+1} - 1)}{3 - 1} = \boxed{\frac{15}{2} \times 3^n - \frac{5}{2}}$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

$T_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} 1 + \sum_{i=0}^{n} v_i = \boxed{n + 1 + \frac{15}{2} \times 3^n - \frac{5}{2}}$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 3^n = 0$ (suite géométrique de raison $q = 3$ avec $q > 1$ et de premier terme $1 > 0$) donc par limite de produit et somme, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty}$

Exercice 5 (suite définie de manière explicite)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{10x}{4x^2 - 1}$. On appelle C_f la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1) f est définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$

$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}}$

2) ▸ $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$

▸ $\forall x \in D_f,\ f(-x) = \frac{10(-x)}{4(-x)^2 - 1} = -\frac{10x}{4x^2 - 1} = -f(x)$

Donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est impaire}}$.

3)

f est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

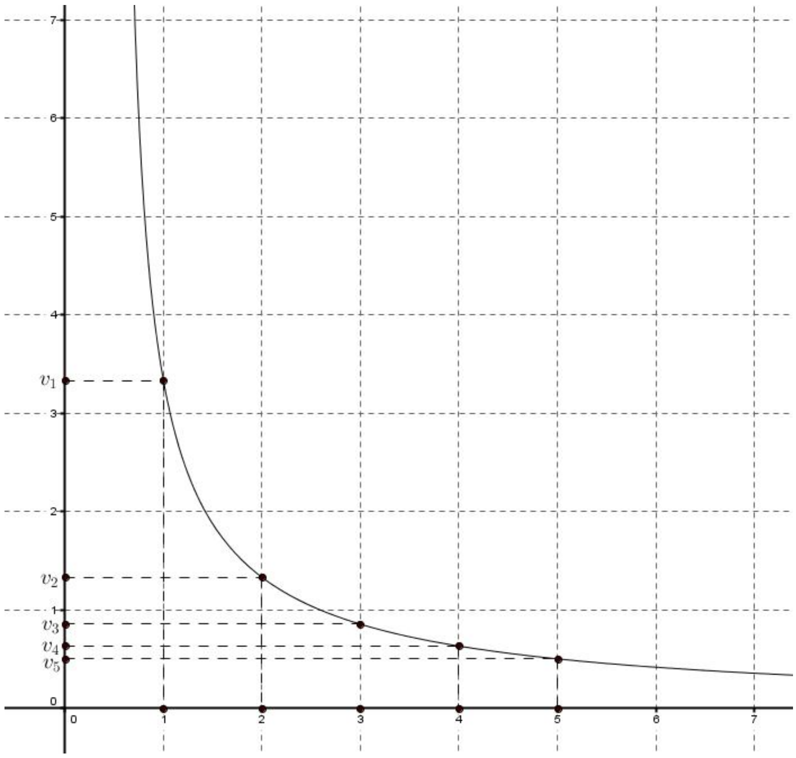
$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \frac{10(4x^2 - 1) - 10x(8x)}{(4x^2 - 1)^2} = \frac{-40x^2 - 10}{(4x^2 - 1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$, $(4x^2 - 1)^2 > 0$ et $-40x^2 - 10 < 0$ donc $f'(x) < 0$

Tableau de variations

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
variations de f	0 $\searrow$	$-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$\|$	$+\infty$ $\searrow$	0

4)



5) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = f(n)$.

a) Voir graphique

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = f(n)$.

Pour étudier la monotonie de la suite (v_n), il suffit d'étudier la monotonie de la fonction f sur $[1,+\infty[$.

Or f est strictement décrosisante sur $[1,+\infty[$ donc $\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante}}$.

c) $\boxed{v_1 = f(1) = \frac{10}{3} \quad , \quad v_2 = f(2) = \frac{4}{3} \quad , \quad v_3 = f(3) = \frac{6}{7}}$

Exercice 6 (**problème de modélisation**)

Problème de Léonard Euler

Le nombre d'habitants d'une province s'accroît de un trentième tous les ans.si il y a au commencement 100 000 habitants.

1) On note u_n le nombre d'habitants de la province après n années.

On a $u_0 = 100000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{30}u_n = \frac{31}{30}u_n$.

Donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{31}{30}$ et de premier terme $u_0 = 100000$.

Pour tout entier naturel n, on a $u_n = 100000 \times \left(\frac{31}{30}\right)^n$.

Pour connaître le nombre d'habitants dans 100 ans, on calcule : $u_{100} = 100000 \times \left(\frac{31}{30}\right)^{100} \approx 2654874$

$\boxed{\text{Le nombre d'habitants dans } 100 \text{ ans sera de } 2654874}$

2) On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 200000 \Leftrightarrow \left(\frac{31}{30}\right)^n \geq 2$

Variables	n nombre entier
Initialisation	n prend la valeur 0
Traitement	Tant que $\left(\frac{31}{30}\right)^n < 2$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	Fin boucle tant que
Sortie	Afficher n

PROBABILITES

Exercice 7 (**loi binomiale**)

1)

a) On reconnaît un schéma binomial.

Epreuve : répondre à une question

Succès : la réponse est juste de probabilité $p = \frac{1}{2}$.

La variable aléatoire X est le nombre de succès à l'issue de $n = 10$ épreuves identiques et indépendantes.

Donc X suit la loi binomiale $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

Autrement dit, $\forall k \in \{0;1;\ldots;10\}$ $P(X=k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

b) L'espérance de X est $E(X) = np = 5$.

L'élève peut donc espérer avoir la moyenne à cet exercice en répondant au hasard.

c) La probabilité que l'élève ait dix réponses justes est $P(X=10) = \frac{1}{2^{10}} = \boxed{\frac{1}{1024}}$

d) La probabilité que l'élève ait au moins une réponse juste est $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \boxed{\frac{1023}{1024}}$

2)

a) $Y = X - (10 - X) \times x = \boxed{(1+x)X - 10x}$.

Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E((1+x)X - 10x) = (1+x)E(X) - 10x = 5(1+x) - 10x = \boxed{5 - 5x}$

b) On cherche un réel x tel que $E(Y) \leqslant 2,5$.

$$\begin{aligned} E(Y) \leqslant 2,5 &\Leftrightarrow 5 - 5x \leqslant 2,5 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{2,5}{5} \\ &\Leftrightarrow x \geqslant 0,5 \end{aligned}$$

Pour que la note d'un élève répondant au hasard n'excède pas 2,5, l'enseignant peut noter de la manière suivante : une réponse juste rapporte un point et une réponse fausse enlève 0,5 points.

c)

Variables	N, k et x nombres entiers
Initialisation	N prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 1 à 10
	x prend au hasard la valeur 0 ou 1
	Si $x = 1$ alors
	N prend la valeur $N+1$
	Sinon
	N prend la valeur $N - 0,5$
	Fin si
	Fin boucle pour
Sortie	Afficher N