Elément de cours : fonctions paires et impaires

Définition

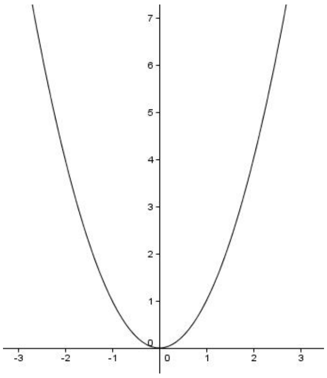
Une fonction f est dite **paire** si :

- $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$

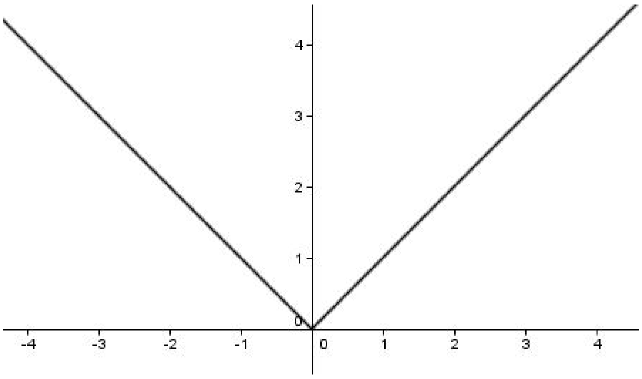
Interprétation graphique : Si une fonction est paire alors sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemples : Les fonctions carré et valeur absolue sont des fonctions paires.

$x \mapsto x^2$



$x \mapsto |x|$



Définition

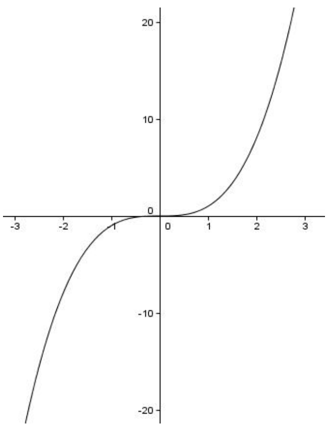
Une fonction f est dite **impaire** si :

- $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$

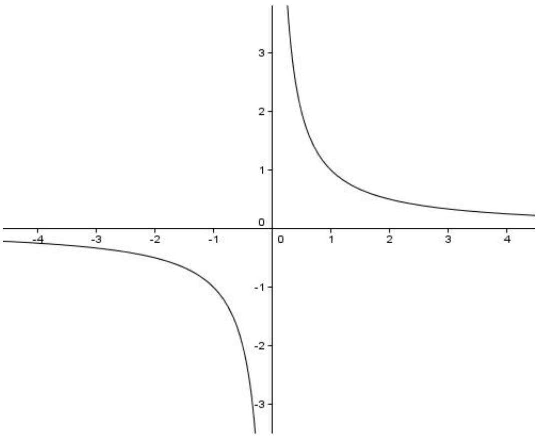
Interprétation graphique : Si une fonction est impaire alors sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemples : Les fonctions cube et inverse sont des fonctions impaires.

$x \mapsto x^3$



$x \mapsto \frac{1}{x}$



FONCTIONS

Exercice 1 (**fonction polynôme**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 18$.

1) Préciser l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f

2) Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f. On dressera le tableau de variation de f.

Exercice 2 (**fonction rationnelle**)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 9x + 12}{4x + 4}$. On appelle C la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1)

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Justifier que f est dérivable sur D_f puis calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f puis construire son tableau de variation.

2)

a) Démontrer que pour tout réel $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{x}{4} + 2 + \dfrac{1}{x+1}$

b) Soit Δ la droite d'équation $y = \dfrac{x}{4} + 2$. Etudier la position relative de C et Δ.

Exercice 3 (**fonction paire**)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8$. Montrer que la fonction f est paire.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{7\}$ par $g(x) = \dfrac{x^3 - 7x^2 - 8x + 56}{x - 7} = \dfrac{(x-7)(x^2-8)}{x-7}$

La fonction g est elle paire ?

3) La somme de deux fonctions paires ayant le même ensemble de définition D est-elle paire ?

SUITES

Exercice 4 (**suite définie par une relation de récurrence**)

1) On considère l'algorithme suivant :

Variables	u nombre réel ; k et n nombres entiers
Entrée	Saisir n
Initialisation	u prend la valeur 6
Traitement	Pour k allant de 1 à n
	u prend la valeur $3u - 2$
	Fin boucle pour
Sortie	Afficher u

Quelle est la valeur affichée par cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

On justifiera à l'aide d'un tableau d'étapes.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 3u_n - 2$

2)

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3) Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1$

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) puis celle de la suite (u_n)

d) Compléter l'algorithme ci-dessous qui détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 10^p$ où p est un entier naturel choisi par l'utilisateur.

Variables	u nombre réel ; $n,\ p$ nombres entiers
Entrée	Saisir ………….
Initialisation	u prend la valeur ……….
	n prend la valeur ……….
Traitement	Tant que ………. faire
	u prend la valeur ……….
	n prend la valeur ……….
	Fin boucle tant que
Sortie	Afficher ……..

4) On considère $S_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$ et $T_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

a) Compléter l'algorithme ci-dessous. Cet algorithme doit afficher la valeur de S_n où n est un entier naturel choisi par l'utilisateur.

Variables	S nombre réel ; i et n nombres entiers
Entrée	Saisir …….
Initialisation	S prend la valeur …………
Traitement	Pour i allant de 0 à n
	S prend la valeur………………………
	Fin boucle pour
Sortie	Afficher S

b) Donner les expressions de S_n et T_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de S_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 5 (**suite définie de manière explicite**)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{10x}{4x^2 - 1}$. On appelle C_f la représentation graphique de f dans le plan muni du repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$.

1) Déterminer son ensemble de définition D_f.

2) Montrer que la fonction f est impaire.

3) Etudier le sens de variation de f puis dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer C_f sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

5) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = f(n)$.

a) Placer v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5.

b) Déterminer la monotonie de la suite (v_n).

c) Calculer v_1 , v_2 , v_3.

Exercice 6 (**problème de modélisation**)

Problème de Léonard Euler

Le nombre d'habitants d'une province s'accroît de un trentième tous les ans.si il y a au commencement 100 000 habitants.

1) Combien y aura-t-il d'habitants dans 100 ans.

2) Ecrire un algorithme permettant de déterminer dans combien d'années la population aura doublé.

PROBABILITES

Exercice 7 (**loi binomiale**)

Un questionnaire est composé de dix questions dont la réponse ne peut être que Vrai ou Faux. Une réponse exacte rapporte un point.
L'algorithme ci-dessous permet de simuler la note obtenue par un élève répondant au hasard.

Variables	N, k et x nombres entiers
Initialisation	N prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 1 à 10
	x prend au hasard la valeur 0 ou 1
	N prend la valeur $N+x$
	Fin boucle pour
Sortie	Afficher N

1) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de réponses justes d'un élève répondant au hasard.

a) Quelle est la loi de probabilité de X ?

b) Quelle note moyenne l'élève peut-il espérer avoir ?

c) Quelle est la probabilité que l'élève ait dix réponses justes ?

d) Quelle est la probabilité que l'élève ait au moins une réponse juste ?

2) L'enseignant choisit de pénaliser les mauvaises réponses. Soit x le nombre de points enlevés en cas de mauvaise réponse et Y la variable aléatoire donnant la note de l'élève.

a) Exprimer Y en fonction de X et x puis calculer son espérance.

b) Le correcteur estime qu'un élève répondant au hasard ne devrait pas obtenir une note supérieure à 2,5. Comment peut-il noter l'exercice ?

c) Modifier l'algorithme précédent pour simuler la note obtenue par un élève avec ce nouveau système de notation.