Eléments de correction du livret de révision de mathématiques à l'attention des élèves entrant en Terminale ES

Exercice 1

1. (a) $3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right) \underset{\text{On développe}}{=} (3x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 3x^2 + \frac{2}{3}\times 3x - 3x - 3\times\frac{2}{3}$

$= 3x^2 + 2x - 3x - 2 = 3x^2 - x - 2 = A(x)$

(b) $3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] \underset{\substack{\text{On développe} \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}}{=} 3\left[x^2 - 2\times\frac{1}{6}x + \frac{1}{36} - \frac{25}{36}\right] = 3\left[x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{24}{36}\right]$

$= 3x^2 - x - \frac{24}{12} = 3x^2 - x - 2 = A(x)$

2. (a) La forme factorisée est la plus adaptée pour résoudre $A(x) = 0$:

$A(x) = 0 \iff 3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right) = 0 \underset{\substack{\text{Un produit est nul} \\ \text{si et seulement si} \\ \text{un des facteurs est nul}}}{\iff} x - 1 = 0 \text{ ou } x + \frac{2}{3} = 0$

$\iff x = 1 \text{ ou } x = -\frac{2}{3}$

Par conséquent, l'ensemble S des solutions est : $S = \left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

(b) Pour calculer $A(0)$, la forme développée est la plus adaptée :

$$A(0) = 3\times 0^2 - 0 - 2 = -2$$

Pour calculer $A\left(\frac{1}{6}\right)$, la forme canonique est la plus adaptée :

$$A\left(\frac{1}{6}\right) = 3\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right] = 3\left(-\frac{25}{36}\right) = -\frac{25}{12}$$

(c) La forme canonique est la plus adaptée :

Pour tout nombre réel x, $A(x) = 3\underbrace{\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]}_{\geqslant -\frac{25}{36}} \geqslant 3\left(-\frac{25}{36}\right) = -\frac{25}{12} = A\left(\frac{1}{6}\right)$

Ainsi, $A(x)$ est le plus petit pour x égal à $\frac{1}{6}$, et sa valeur est alors égale à $-\frac{25}{12}$.

Exercice 2

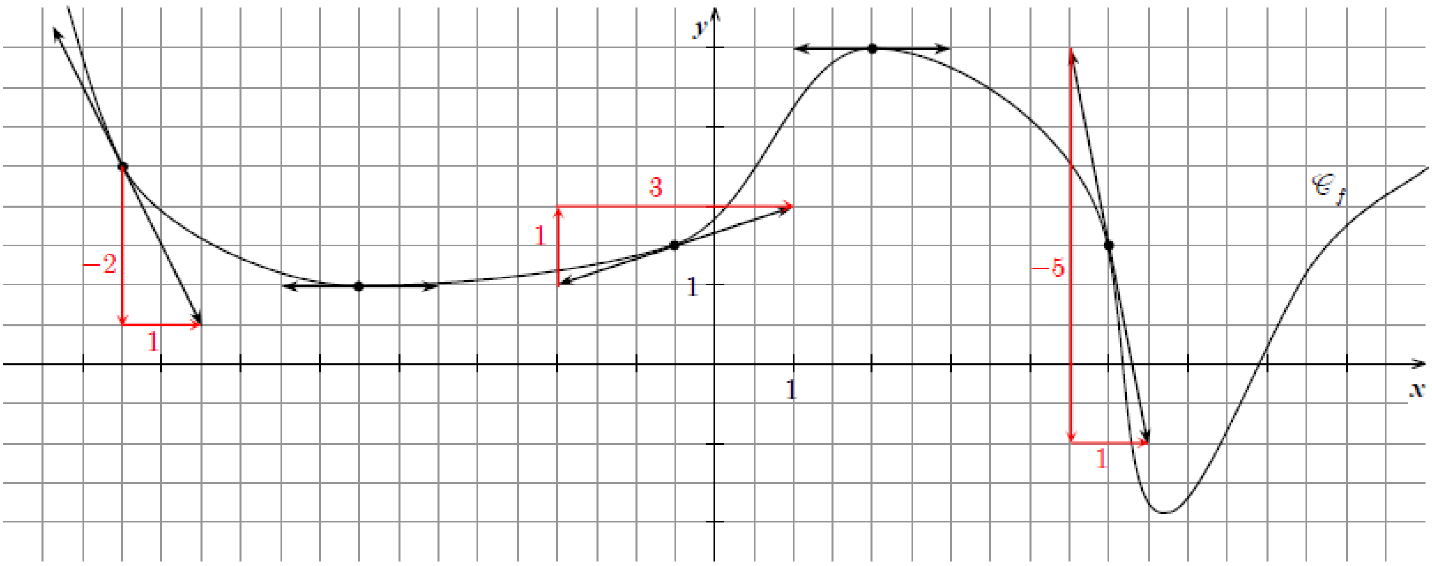
1. D'après l'énoncé, la population en 2011, est :

$$15\,000\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1-\frac{5}{100}\right) = 14\,677{,}5 \approx 14\,678$$

2. Soit S la somme qui doit être placé en 2014 :

$$S\left(1+\frac{1{,}75}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}75}{100}\right) = 12\,000 \iff S = \frac{12\,000}{\left(1+\frac{1{,}75}{100}\right)\left(1+\frac{1{,}75}{100}\right)} \approx 11\,591$$

Exercice 3



1. On obtient par lecture graphique :

   $f'(-7,5) = \frac{-2}{1} = -2$; $f'(-4,5) = 0$; $f'(-0,5) = \frac{1}{3}$; $f'(2) = 0$ et enfin $f'(5) = \frac{-5}{1} = -5$

2. La formule donnant l'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

   (a) Pour $a = -0,5$:

$$\begin{aligned} y = f'(-0,5)(x+0,5) + f(-0,5) &\iff y = \frac{1}{3}(x+0,5) + 1,5 \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \times 0,5 + 1,5 \\ &\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} + \frac{3}{2} \\ &\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} + \frac{9}{6} \iff y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{6} \\ &\iff y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$

   (b) Pour $a = 2$:

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) \iff y = 0 \times (x-2) + 4 \iff y = 4$$

   (c) Pour $a = 5$:

$$\begin{aligned} y = f'(5)(x-5) + f(5) &\iff y = -5(x-5) + 1,5 \iff y = -5x + 25 + 1,5 \\ &\iff y = -5x + 26,5 \end{aligned}$$

Exercice 4

1. $f'(x) = -2 \times 4x^3 + 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x + 2 = \boxed{-8x^3 + 9x^2 + 10x + 2}$

2. $g'(x) = (3 \times 2x)(2x+7) + \left(3x^2 - 1\right) \times 2 = 6x(2x+7) + 6x^2 - 2 = 12x^2 + 42x + 6x^2 - 2$

   $= \boxed{18x^2 + 42x - 2}$

3. $h'(x) = \dfrac{(-3) \times (5-2x) - (-3x+5)(-2)}{(5-2x)^2} = \dfrac{-15 + 6x - (6x - 10)}{(5-2x)^2} = \boxed{\dfrac{-5}{(5-2x)^2}}$

Exercice 5

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 6$, par conséquent : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$
2. Étudions le signe de f' :
   Calculons le discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 3 \times (-45) = 576 = 24^2 > 0$$
   Ainsi, le trinôme a deux racines :
   $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{24^2}}{6} = -5 \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{24^2}}{6} = 3$$
   Par conséquent, le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	181	$\searrow$	-75	$\nearrow$	

$$f(-5) = (-5)^3 + 3(-5)^2 - 45(-5) + 6 = 181 \text{ et } f(3) = (3)^3 + 3(3)^2 - 45(3) + 6 = -75$$

Exercice 6

La suite arithmétique (u_n) est caractérisée par $u_3 = 9$ et $u_8 = -21$

1. Donner une expression de u_n en fonction de n.

(u_n) est une suite arithmétique.
Par définition, $u_n = u_0 + nr$.
On sait que $u_3 = u_0 + 3r = 9$ et $u_8 = u_0 + 8r = -21$
$u_8 - u_3 = -21 - 9 = -30 = 5r$
donc $r = -6$
$u_3 = 9 = u_0 + 3*(-6)$
donc $u_0 = 9 + 18 = 27$
Ainsi $u_n = 27 - 6n$

2. Déterminer le sens de variation de la suite u.

Méthode 1 : la raison de cette suite arithmétique est $-6 < 0$.
La suite (u_n) est donc décroissante.
Méthode 2 : $u_{n+1} - u_n = 27 - 6(n+1) - 27 + 6n = 27 - 6n - 6 - 27 + 6n = -6 < 0$
Donc la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 7

La suite géométrique (u_n) est caractérisée par $u_3 = 500$ et $u_7 = 312500$

Donner une expression de u_n en fonction de n.

u est une suite géométrique. Par définition, $u_n = u_0q^n$. On sait que $u_3 = u_0q^3 = 500$ et $u_7 = u_0q^7 = 312500$

$\frac{u_7}{u_3} = \frac{u_0q^7}{u_0q^3} = q^4 = \frac{312500}{500} = 625 = 5^4$ donc $q = 5$

$u_3 = u_0q^3 = u_0 \times 5^3 = 500$

donc $u_0 = \frac{500}{125} = 4$

Donc $u_n = 4 \times 5^n$

Exercice 8

1. Déterminer le sens de variations de la suite v définie pour $n \geq 1$ par $v_n = \frac{n}{2^n}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} < 1 \text{ car } n > 1$$

Comme $n+n = 2n > n+1$ Alors $\frac{n+1}{2n} < 1$

donc (v_n) est décroissante

2. Déterminer le sens de variations de la suite u définie pour tout n ≥ 1 par $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0 \text{ car } n+2 > n$$

donc (u_n) est une suite décroissante.

<u>Exercice 9</u>

La location d'une machine coûte 60 € la 1ère journée. La 2ème journée de location coûte 67 € et chaque journée supplémentaire 7 € de plus que la précédente. Combien coûtera le 8ème jour de location ? le 15ème jour ?

Le prix de la location suit une suite arithmétique de premier terme 60 et de raison 7,
donc $u_n = 60 + 7n$.

Le 8ème jour correspond à $u_7 = 60 + 7 \times 7 = 60 + 49 = 109$.
La location le 8ème jour coutera 109€.

Le 15ème jour correspond à $u_{14} = 60 + 7 \times 14 = 60 + 98 = 158$.
La location le 15ème jour coutera 158€.

<u>Exercice 10</u>

Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 2000, il coûtait alors 150€. Quel est son prix à la bourse aux livres de 2005 ? de 2010 ?

Le prix du livre suit une suite géométrique de premier terme 150 et de raison 0.88
donc $u_n = 150 \times 0.88^n$

Le prix en 2005 correspond à $u_5 = 150 \times 0.88^5 = 79$.
Le prix du libre en 2005 est de 79€

Le prix en 2010 correspond à $u_{10} = 150 \times 0.88^{10} = 41$.
Le prix du livre en 2010 est de 41€