# Livret de liaison
# Première Générale – Terminale Générale
# (spécialité Mathématiques ou Mathématiques Complémentaires)

## Table des matières

# I Fiche 1 – Calcul littéral

**Prérequis :**

- ✗ Forme canonique d'un polynôme du second degré.
- ✗ Équations et inéquations du second degré.
- ✗ Racine carrée et valeur absolue d'un nombre.
- ✗ Réduction au même dénominateur d'une expression.
- ✗ Symbole $\Sigma$.

**Exercice 1 :**
*Les deux questions sont indépendantes.*

1) Compléter avec des nombres en rajoutant des étapes :
Pour tout $x$ réel, on a : $3x^2-4x+2=3\left((x-\cdots)^2-\cdots\right)+2=3\,(x-\cdots)^2+\cdots$.

2) À l'aide d'une méthode analogue, compléter avec des nombres :
Pour tous réels $x$ et $y$, on a :
$$3x^2-4x+3y^2+6y-8=0 \iff \cdots \iff (x-\cdots)^2+(y-\ldots)^2=\cdots.$$
En déduire que l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan muni d'un repère orthonormé vérifiant l'équation $3x^2-4x+3y^2+6y-8=0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

**Exercice 2 :**
*Les quatre questions sont indépendantes.*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

a) $\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{12}=0\,;$

b) $x^4-x^2-12=0\,;$

c) $\dfrac{6}{2x+1}\leqslant 4x-1\,;$

d) $\left(4-2x^2\right)(2x-1)>0.$

**Exercice 3 :**
On veut déterminer un encadrement de l'expression $A=\dfrac{1}{5-x^2}$ pour $x\in[-1\,;2]$.

1) Justifier les étapes suivantes :
$$\begin{array}{rlll}
-1\leqslant x\leqslant 2 & \text{donc} & \cdots\leqslant x^2\leqslant\cdots & \text{car} \\
 & \text{donc} & \cdots\leqslant -x^2\leqslant\cdots & \text{car} \\
 & \text{donc} & \cdots\leqslant 5-x^2\leqslant\cdots & \text{car} \\
 & \text{donc} & \cdots\leqslant \dfrac{1}{5-x^2}\leqslant\cdots & \text{car}
\end{array}$$

2) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{1}{5-x^2}$, puis étudier ses variations et retrouver l'encadrement obtenu à la question précédente.

**Exercice 4 :**
*Les quatre questions sont indépendantes.*

1) Exprimer les trois écritures fractionnaires suivantes sans racine carrée au dénominateur :
 a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,;$ b) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\,;$ c) $\dfrac{1-2\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}.$

2) Les deux propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
 a) $\sqrt{-x}$ n'est défini que pour $x=0$.
 b) $\sqrt{|-x|}$ est défini pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

3) Soit $A(x) = \dfrac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

   a) Pour quelles valeurs de $x$, cette expression est-elle définie ?

   b) Prouver que, pour tout $x$ de l'ensemble de définition, $A(x) = \sqrt{x} - 2$.

4) a) Simplifier $\sqrt{x^2}$ en utilisant les valeurs absolues.

   b) Quel est l'ensemble de définition des expressions suivantes : $\sqrt{x^2}$, $\left(\sqrt{x}\right)^2$ et $x$ ?

   c) L'égalité $x - 2\sqrt{x^2} = -x$ est-elle vraie pour tout $x$ réel ?

   d) Donner la valeur de $x - 2\sqrt{x^2}$ suivant les valeurs de $x$.

**Exercice 5 :**

On considère l'expression suivante :

$$A = \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{20^2}.$$

1) Soit $k$ un entier tel que $k \geqslant 2$.

   Justifier que l'on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$ et démontrer l'égalité : $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

2) Soit $B = \displaystyle\sum_{k=2}^{20} \frac{1}{k(k-1)}$.

   Montrer que $B = 1 - \dfrac{1}{20}$.

3) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{20}$.

4) Élaborer un algorithme avec une boucle « Pour » qui permet de calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k^2}$ et le programmer sur la calculatrice ou sur Python.

   Donner la valeur affichée en sortie avec toutes les décimales obtenues. Vérifier le résultat trouvé au 3).

5) On considère maintenant l'expression suivante définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

   Prouver, en utilisant une démarche analogue, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.

## II Fiche 2 – Dérivation

**Prérequis :**

- ✗ Être capable d'établir le tableau de signes de quantités du premier ou du second degré et de leur produit ou quotient.
- ✗ Connaître la dérivée des fonctions de référence, en particulier les dérivées de $x \mapsto x^n$ (avec $n$ dans $\mathbb{Z}$), $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.
- ✗ Connaître les formules de dérivation d'un produit et d'un quotient.
- ✗ Connaître la formule de dérivation d'une composée du type $x \mapsto g\,(ax+b)$ où $g$ est une fonction dérivable.
- ✗ Être à l'aise avec le calcul littéral et, en particulier, la factorisation.
- ✗ Enfin, toujours garder en tête que l'on calcule une dérivée pour obtenir son signe ainsi que les réels pour lesquels elle s'annule. Il faudra donc le plus souvent chercher à factoriser le résultat. Dans un calcul de dérivation, on ne développe qu'à une seule condition : lorsque la factorisation n'est pas possible !

**Exercice 1 :**
Pour chaque fonction ci-dessous, calculer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ et établir le tableau de variation de la fonction.

a) $f(x) = 2x^3 - 6{,}5x^2 + 5x + 7$ ; b) $f(x) = \left(x^2+1\right)\left(6x^2-10\right)$ ; c) $f(x) = \dfrac{4x+1}{2x^2+1}$.

**Exercice 2 :**
Pour chaque fonction ci-dessous, préciser son ensemble de définition et de dérivabilité puis calculer la fonction dérivée sur son ensemble de dérivabilité.

a) $f(x) = \sqrt{4x-1}$ b) $f(x) = (3x-5)^{-6}$ ; c) $f(x) = (2-7x)^3$.

**Exercice 3 :**
On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;0[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{2}{x}$.

Les affirmations ci-dessous sont-elles exactes ? Justifier vos réponses.

1) La fonction $f$ admet un maximum sur $]-\infty\,;0[$ égal à $-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}+1$.
2) Pour tout $x$ de $]-\infty\,;-2]$, on a : $f(x) \geqslant -2$.
3) La fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty\,;-1{,}41[$.

**Exercice 4 :**
On souhaite fabriquer un aquarium (sans couvercle) de base carrée pour contenir des poissons rouges.
Il faut un volume de 13,5 L (soit $13\,500\ \text{cm}^3$) pour que les poissons soient heureux.
On cherche à déterminer les dimensions de l'aquarium afin d'utiliser le moins de matériel possible.

1) On note $x$ la longueur, en cm , d'un côté de la base.
   Quelles sont les valeurs possibles pour $x$ ?
   Donner l'expression de la hauteur $h$ de l'aquarium en fonction de $x$.
2) Soit $\mathscr{A}(x)$ la somme des aires de toutes les faces de cette boîte.
   Exprimer $\mathscr{A}(x)$ en fonction de $x$.
3) Pour tout $x$ de l'ensemble de définition, calculer $\mathscr{A}'(x)$ et montrer que $\mathscr{A}'(x) = \dfrac{2(x-30)(x^2+30x+900)}{x^2}$.
4) Établir le tableau de variation de $\mathscr{A}$ sur son ensemble de définition.
5) Déterminer les dimensions de l'aquarium qui permettent d'obtenir une aire minimale.
   Quelle sera alors cette aire ?

**Exercice 5 :**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

L'objet de cet exercice est de construire une représentation approchée de la fonction $f$ sur l'intervalle $[1\,;2]$ en utilisant la méthode d'Euler.

**Partie A :** Présentation de la méthode

L'idée de Leonhard Euler (1707–1783) est assez simple. S'il connaît la valeur de la fonction en un point et l'expression de la dérivée de la fonction $f$ alors il est possible de calculer une valeur approchée de la fonction en utilisant son taux d'accroissement.

- **Première étape :** On connaît la valeur de la fonction en un nombre $x_0$ et $A_0\,(x_0\,;f(x_0))$ est un point de la courbe de $f$.

  La fonction étant dérivable en $x_0$, on a : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$.

  Donc, si $h$ est « suffisamment petit », on peut écrire l'approximation suivante :

  $$f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\times f'(x_0).$$

  On définit alors un nouveau point $A_1$ de coordonnées $\begin{cases} x_1=x_0+h \\ y_1=f(x_0)+h\times f'(x_0)\end{cases}$ qui est une « bonne » approximation du point de la courbe de $f$ d'abscisse $x_0+h$.
- **Seconde étape :** On réitère le procédé ci-dessus en utilisant les valeurs de $x_1$ et $y_1$ pour obtenir un nouveau point $A_2\,(x_2\,;y_2)$.
- **Troisième étape :** Il est alors possible de construire une suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les coordonnées sont définies par les suites telles que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :
  - $A_n\,(x_n\,;y_n)$ ;
  - $x_0\in\mathbb{R}$ ; $y_0\in\mathbb{R}$ et on sait que : $y_0=f(x_0)$ ;
  - $x_{n+1}=x_n+h$ et $y_{n+1}=y_n+h\times f'(x_n)$.
- **Quatrième étape :** Les segments $[A_0A_1]$, $[A_1A_2]$,... forment alors une représentation approchée de $f$. Bien sûr, cette représentation dépend du nombre $h$ choisi qui est appelé « pas de la méthode d'Euler ».

**Partie B :** Utilisation de la méthode

1) En utilisant l'approximation d'Euler avec un pas de 0,2 ; vérifier que $f(1{,}2)\approx 0{,}2$ et que $f(1{,}4)\approx 0{,}37$.
2) Compléter le tableau ci-dessous traduisant la méthode d'Euler appliquée sur l'intervalle $[1\,;2]$ avec un pas de 0,2.

| $x$ | 1 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | | | | |
| $f(x)$ | | | | | | |

3) Quelle valeur approchée de $f(2)$ obtient-on ?
   À l'aide de votre calculatrice, calculer $\ln(2)$. (Il faut chercher la touche « ln » sur le clavier).
   Que constate-t-on ?

   *On vient d'obtenir, avec des méthodes de Première, une valeur approchée de la fonction logarithme népérien qui sera étudiée en détail en Terminale.*
4) Dans un repère orthogonal, tracer la ligne brisée $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.
5) Écrire un algorithme permettant de réaliser l'approximation d'Euler en demandant à l'utilisateur de choisir le pas $h$ de la méthode.
   Tester votre algorithme avec un pas de 0,1 puis de 0,05. Noter les valeurs approchées obtenues pour $f(2)$.

# III Fiche 3 – Étude de fonction

**Prérequis :**

- ✗ Savoir déterminer la dérivée d'une fonction ainsi que son signe.
- ✗ Savoir déterminer l'équation réduite d'une tangente en un point.
- ✗ Connaître le calcul littéral et, en particulier, la factorisation.

**Exercice 1 :**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_1$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
2) On cherche, à présent, à étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de sa tangente $\mathscr{T}_1$.
   a) Soit $P$ le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 7x - 4$.
   Calculer $P(-4)$.
   b) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que, pour tout $x$ réel, on ait : $P(x) = (x + 4)(ax^2 + bx + c)$.
   c) En déduire le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   d) Conclure.

**Exercice 2 :**

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'écran de votre calculatrice.
   a) Quelle propriété géométrique pouvez-vous conjecturer ?
   b) Prouver cette conjecture.
2) Pour tout $x$ réel, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{(x^2 + 15)(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^2}$.
3) Établir le tableau de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^+$.
4) On note $\mathscr{T}_0$ la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse 0.
   a) Vérifier que $\mathscr{T}_0 : y = \dfrac{5}{3}x$.
   b) Déterminer le signe de l'expression $f(x) - \dfrac{5}{3}x$ suivant les valeurs de $x$.
   c) En déduire la positive relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente $\mathscr{T}_0$.
   *On dit que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion pour la courbe de $f$.*
5) a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x$ réel, on ait : $f(x) = ax + \dfrac{bx}{x^2 + 3}$.
   b) On considère à présent la droite $\mathscr{D} : y = -x$.
   Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   c) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats à $10^{-4}$ près) :

| $x$ | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{8x}{x^2 + 3}$ | | | | |

   Quelle conjecture graphique peut-on faire au vu de ces résultats ?
   *On dit que la droite $\mathscr{D}$ est une asymptote oblique à la courbe de $f$ en $+\infty$.*
6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de $f$ avec l'axe des abscisses.
7) En utilisant tous les renseignements obtenus aux questions précédentes, construire avec précision $\mathscr{C}$, $\mathscr{T}_0$ et $\mathscr{D}$ dans le repère $(O\,;\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. (Ne pas oublier les tangentes horizontales. . . )

**Exercice 3 :**

Un producteur de cinéma souhaite promouvoir son film *Knight of Badassdom*.
Une étude statistique permet d'établir que la probabilité qu'une personne prise au hasard en connaisse le nom après $x$ semaines est donnée par la fonction $p(x) = \dfrac{3x}{4x+3}$ définie pour $x$ réel positif.

1) Calculer $p(3)$.
   En déduire la probabilité qu'une personne prise au hasard ne connaisse pas le nom du film après trois semaines de publicité.
2) Combien faudra-t-il de semaines pour que la probabilité qu'une personne prise au hasard connaisse le nom du film soit de 0,5 ?
3) Étude approfondie de la fonction $p$ sur $[0\,;+\infty[$ :
   a) Étudier les variations de la fonction $p$ sur son intervalle de définition.
   b) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_3$ à la courbe de $p$ au point d'abscisse 3.
   c) On considère la droite $\mathscr{D} : y = \dfrac{3}{4}$.
      Étudier la position relative de cette droite et de la courbe $\mathscr{C}$ de $p$.
   d) À l'aide de votre calculatrice, compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats à $10^{-4}$ près) :

| $x$ | 0 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(x) - \dfrac{3}{4}$ | | | | | |

   *On dit que la droite $\mathscr{D}$ est une asymptote horizontale à la courbe de $p$ en $+\infty$.*

   e) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ et la tangente $\mathscr{T}_3$ dans un repère orthogonal.
      On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 10 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.
   f) Déterminer graphiquement le temps nécessaire pour que la probabilité passe de 0,6 à 0,7.
   g) Le directeur marketing désire que 80 % de la population connaisse son film.
      A-t-il une chance de voir son souhait se réaliser ?

# IV Fiche 4 – Suites numériques

**Prérequis :**

- ✗ Suites arithmétiques.
- ✗ Suites géométriques.
- ✗ Sens de variation d'une suite.
- ✗ Somme de termes consécutifs d'une suite.
- ✗ Algorithmes.

**Exercice 1 :**
On considère une suite $(u_n)$ arithmétique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2) Calculer $u_{12}$.
3) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{12} u_k$.

**Exercice 2 :**
On considère une suite $(u_n)$ géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, exprimer $u_n$ en fonction de $n$.
2) Calculer $u_9$.
3) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} u_k$.

**Exercice 3 :**
Un globe-trotter a décidé de parcourir 5 000 km à pied.
Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % par jour.
On note $d_n$ la distance parcourue en kilomètres durant le $n$-ième jour ainsi $d_1 = 50$.

1) Calculer les distances $d_2$ et $d_3$.
2) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer $d_{n+1}$ en fonction de $d_n$.
   En déduire la nature de la suite $(d_n)$.
3) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, exprimer $d_n$ en fonction de $n$.
4) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, ainsi $L_n$ est la distance totale parcourue en $n$ jours.
   Exprimer $L_n$ en fonction de $n$.
5) Conjecturer la limite de la suite $(L_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il parcourir les 5 000 km prévus ?

**Exercice 4 :**
Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 6$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$.
Soit la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n + 3$.

1) Calculer, à la main, les quatre premiers termes de chaque suite.
2) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
3) En déduire, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$ puis celle de $u_n$ en fonction de $n$.
4) Déterminer le huitième terme de la suite $(u_n)$.

**Exercice 5 :**
On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \neq -\dfrac{2}{3}$ et $u_n \neq 0$.

On considère alors la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1) Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.

2) a) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, exprimer $v_n$ en fonction de $n$.

b) Justifier que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $v_n \neq 1$.

c) En déduire que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{3n+2}$.

3) Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

4) a) Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait : $u_n < 0{,}01$.

b) Un des trois algorithmes ci-dessous permet de retrouver ce résultat.
Le retrouver en justifiant votre réponse.

| Algorithme 1 | Algorithme 2 | Algorithme 3 |
| --- | --- | --- |
| $N \longleftarrow 0$<br>$U \longleftarrow 1$<br>Tant que $U < 0{,}01$<br>$\quad N \longleftarrow N+1$<br>$\quad U \longleftarrow \dfrac{2}{2+3N}$<br>Fin Tant que<br>Afficher $N$ | $N \longleftarrow 0$<br>$U \longleftarrow 1$<br>Tant que $U \geqslant 0{,}01$<br>$\quad N \longleftarrow N+1$<br>$\quad U \longleftarrow \dfrac{2}{2+3N}$<br>Fin Tant que<br>Afficher $N$ | $N \longleftarrow 0$<br>$U \longleftarrow 0{,}4$<br>Tant que $U \geqslant 0{,}01$<br>$\quad N \longleftarrow N+1$<br>$\quad U \longleftarrow \dfrac{2}{2+3N}$<br>Fin Tant que<br>Afficher $N$ |

**Exercice 6 :**

Pour améliorer vos vacances, je vous propose de vous donner 2 500 euros par jour pendant 14 jours.
En contrepartie, je vous demande peu de choses :

- Le 1^er^ jour, vous me donnez 3 centimes.
- Le 2^ème^ jour, vous me donnez 9 centimes.
- Le 3^ème^ jour, 27 centimes, le 4^ème^ jour, 81 centimes… et vous triplez chaque jour la somme du jour qui précède, et ainsi de suite pendant 14 jours.

Êtes-vous assez fou pour refuser mon offre ? Justifier la réponse.

# V Fiche 5 – Probabilités

**Prérequis :**

✗ Probabilités conditionnelles.

✗ Événements indépendants.

✗ Variable aléatoire.

✗ Paramètres d'une variable aléatoire de dispersion : espérance, variance, écart type.

**Exercice 1 :**

Un centre de vacances pour adolescents propose deux activités : équitation et tir à l'arc.
Les adolescents peuvent s'inscrire à une, deux ou aucune activité(s) : 73 % choisissent de s'inscrire à l'équitation ; 66 % au tir à l'arc et, parmi ces derniers, 75 % se sont inscrits aux deux activités.
On choisit un adolescent au hasard et on note les événements $E$ : « l'adolescent fait de l'équitation » et $T$ : « l'adolescent fait du tir à l'arc ».

1) À l'aide des notations mathématiques, traduire en probabilités, avec les événements $E$ et $T$, les informations données dans l'énoncé.
2) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en pourcentages.

| | $E$ | $\overline{E}$ | Total |
|---|---|---|---|
| $T$ | | | |
| $\overline{T}$ | | | |
| Total | | | 100 |

3) Jeanne est inscrite à l'équitation. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-3}$ près, qu'elle ne fasse pas de tir à l'arc ?
4) Riadh n'est pas inscrit à l'équitation. Quelle est la probabilité, arrondie à $10^{-3}$ près, qu'il fasse du tir à l'arc ?

**Exercice 2 :**

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 48 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. On suppose qu'il n'y a pas de vote nul ni de vote blanc.
Compte tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.
On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note $A$ l'événement : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A », $B$ l'événement : « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » et $V$ l'événement : « la personne interrogée dit la vérité ».

1) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation.
2) a) Déterminer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   b) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, déterminer la probabilité arrondie à $10^{-3}$ près qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3) Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote pour le candidat A est 0,536.

**Exercice 3 :**

Jeanne prend son parapluie pour se rendre au travail un jour sur dix.
Elle a remarqué que lorsqu'elle avait son parapluie, il pleuvait dans 80 % des cas, et, lorsqu'elle ne l'avait pas, il pleuvait dans 15 % des cas.
Les événements $A$ : « Jeanne prend son parapluie » et $B$ : « Il pleut » sont-ils indépendants ?

**Exercice 4 :**
Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.
On note $V$ l'événement « la boule tirée est verte ».
*Les parties A, B et C sont indépendantes.*

**Partie A :**

On tire successivement deux boules en remettant la première boule dans l'urne après le premier tirage.

1) On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$.
2) Déterminer l'espérance mathématique de $X$.
3) Un joueur mise 3 €. Il gagne 2 € par boule verte tirée. On note $Y$ la variable aléatoire égale au bénéfice du joueur.
   a) Exprimer $Y$ en fonction de $X$.
   b) Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Y)$.
      Le jeu est-il favorable au joueur ?
   c) Quel devrait être le montant gagné pour chaque boule verte pour que le jeu soit équitable ?

   Pour cette question 3), on sera amené à utiliser la propriété suivante qui est démontrée dans le livret de correction :
   **Propriété :**
   Soit $X$ une variable aléatoire et soient $a$ et $b$ deux réels.
   On a : $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$.

**Partie B :**

On tire maintenant simultanément deux boules dans l'urne. On assimile alors ce tirage à un tirage de deux boules sans remise.
Soit $Z$ la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z$.

**Partie C :**

On tire une boule. Si on obtient une verte, on arrête ; sinon on tire une autre boule parmi les restantes. On recommence ainsi, tant qu'on n'obtient pas une verte.
On note $A$ la variable aléatoire qui associe le rang d'arrivée de la première boule verte.
Déterminer la loi de probabilité de $A$.

**Exercice 5 :**
On s'intéresse au jeu de la roulette.
On réalise une mise simple.
On a donc une chance sur 37 de gagner et, dans ce cas, on remporte 35 fois la mise plus la mise.
On suit la méthode suivante :

- On mise un euro.
- Si on gagne, on s'arrête.
- Si on perd, on recommence, en doublant la mise.
- On s'arrête au premier tirage gagnant.

1) Écrire un algorithme permettant de simuler cette façon de jouer.
   Faire afficher le nombre de parties jouées, la somme totale misée et le gain global.
2) Le programmer sur Python ou sur votre calculatrice. Exécuter le programme plusieurs fois.
   Que penser de cette méthode ?

# VI Fiche 6 – Vecteurs

**Prérequis :**

✗ Condition de colinéarité de deux vecteurs.

✗ Vecteurs directeurs et normaux d'une droite. Équations cartésiennes d'une droite.

✗ Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

✗ Expression d'un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires.

**Exercice 1 :**
Soit $ABCD$ un parallélogramme.
Soient $E$ le point tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ et $F$ le point tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
3) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires. Que cela signifie-t-il pour les points $C$, $E$ et $F$ ?

**Exercice 2 :**
Soient $A$ et $B$ deux points distincts.
On cherche à construire le point $M$ tel que : $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont-ils colinéaires ? Ont-ils le même sens ? Ont-ils la même norme ?
2) En utilisant la relation de Chasles, montrer que l'on a l'égalité : $7\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
3) En déduire une expression de $\overrightarrow{AM}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$. Construire le point $M$.

**Exercice 3 :**
Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{3}\\-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

**Exercice 4 :**
*Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.*

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

1) On considère un point $A\,(-2\,;3)$ appartenant à une droite $(d)$ dont le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

   Déterminer une équation cartésienne de la droite $(d)$.
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite $(d')$ parallèle à la droite $(d)$ : $x + 2y - 5 = 0$ et passant par le point $A\,(0\,;1)$.

**Exercice 5 :**
Les droites $d_1$ et $d_2$ ont respectivement pour équation $2x - y + 3 = 0$ et $4x - 7y + 1 = 0$.
Soit $m$ un réel, on considère la droite $\Delta_m$ d'équation : $(2m+1)\,x + my + 12 = 0$.

Comment choisir le réel $m$ pour que ces trois droites soient concourantes ?

**Exercice 6 :**
On considère la droite $d$ d'équation cartésienne $6x + 5y - 2 = 0$ et le point $A\,(-1\,;-2)$.

1) Vérifier que le point $A$ n'appartient pas à la droite $d$.
2) Donner un vecteur normal à la droite $d$.
3) En déduire une équation de la droite $d'$ perpendiculaire à la droite $d$ et passant par $A$.
4) En déduire les coordonnées du point $H$, projeté orthogonal du point $A$ sur la droite $d$.

# VII Fiche 7 – Produit scalaire

**Prérequis :**

- ✗ Produit scalaire dans le plan.
- ✗ Vecteurs normaux à une droite.
- ✗ Applications du produit scalaire : calculs d'angles, de longueurs et d'équations de droites et de cercles.

**Exercice 1 :**
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.
Soient $A\,(-1\,;2)$ et $B\,(5\,;3)$ deux points du plan.
En utilisant le produit scalaire, déterminer les équations suivantes :

1) Équation réduite de la droite $\mathscr{D}$ médiatrice du segment $[AB]$.
2) Équation sous la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$.
   En déduire le centre et le rayon.
3) Équation cartésienne de la tangente $\mathscr{T}$ en $A$ au cercle de cercle $O$ et de rayon $OA$.

**Exercice 2 :**
Soit $ABCD$ un carré. Soient $BCF$ et $DCE$ deux triangles équilatéraux extérieurs au carré $ABCD$.

1) Faire une figure.
2) On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.
   a) Justifier que ce repère est orthonormé.
   b) Donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
   c) Démontrer que les droites $(BE)$ et $(AF)$ sont perpendiculaires.

**Exercice 3 :**
Soit $ABCD$ un rectangle direct tel que $BC=1$ et $AB=3$.
On note $E$ le point de $[CD]$ tel que $DE=1$.
Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée d'une mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.

1) Faire une figure.
2) a) Déterminer les longueurs $EA$ et $EB$.
   b) En déduire une expression de $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ en fonction de $\cos\left(\widehat{AEB}\right)$.
3) a) En se plaçant dans un repère orthonormé judicieusement choisi, donner les coordonnées des points $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$.
   b) En déduire une valeur exacte de $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$.
4) En déduire, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$ en radian à $10^{-2}$ près.

**Exercice 4 :**
Soient $A\,(1\,;2)$ et $B\,(2\,;-1)$ deux points du plan.
On cherche à déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M$ du plan vérifiant : $\dfrac{MB}{MA}=2$.

1) Démontrer que $M\in\mathscr{E}$ si et seulement si $MB^2-4MA^2=0$.
2) Démontrer que les coordonnées du point $M\,(x\,;y)$ vérifient l'équation $-3x^2-3y^2+4x+18y-15=0$.
3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de cet ensemble.

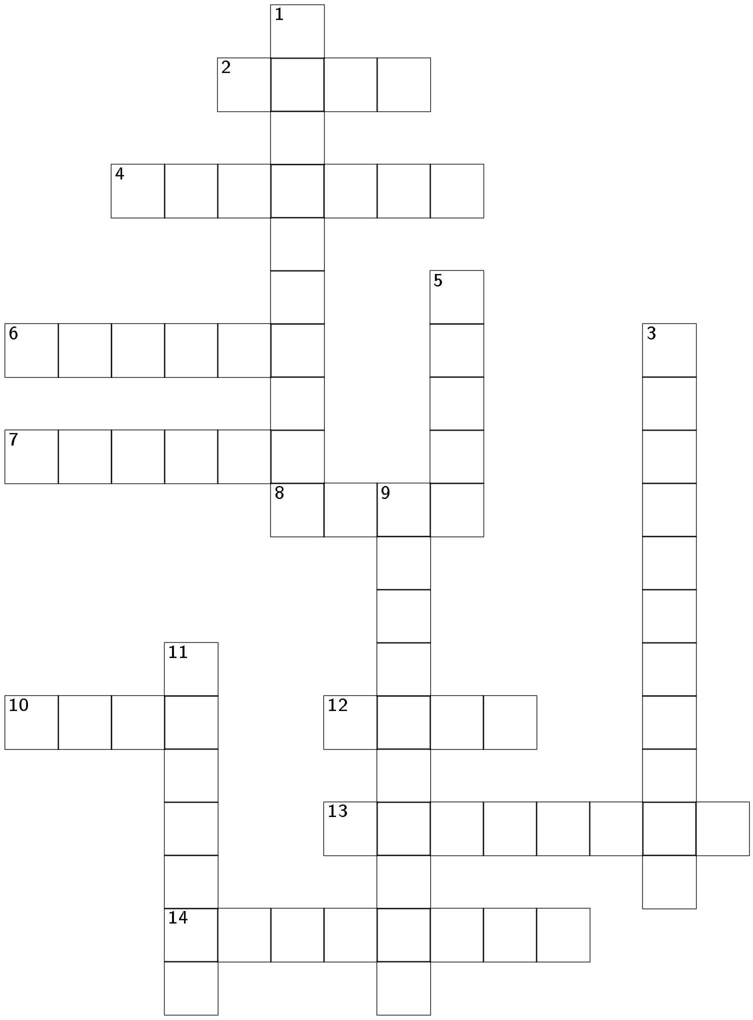
# VIII Fiche 8 – Géométrie dans l'espace

**Prérequis :**

✗ Solides usuels étudiés au collège.

✗ Positions relatives de droites et de plans de l'espace, parallélisme (programme de Seconde).

**Exercice 1 :**




**Horizontal :**

2 Pour calculer le volume d'un prisme droit, on multiplie l'aire de la ... par la hauteur.

4 Deux plans de l'espace sont soit parallèles soit ... .

6 L'intersection de deux plans sécants est une ... .

7 L'ensemble des points de l'espace situés à une distance $r$ d'un même point est une ... .

8 Dans une pyramide à base hexagonale, il y a ... faces.

10 Film fantastique de 1997 de Vincenzo Natali dans lequel un groupe de personnes se retrouve emprisonné.

12 Par trois points non alignés de l'espace, il passe un unique ... .

13 Deux droites coplanaires sont soit parallèles soit ... .

14 Un solide à huit faces est un ... .

**Vertical :**

1 Deux droites parallèles à une même droite sont ... entre elles.

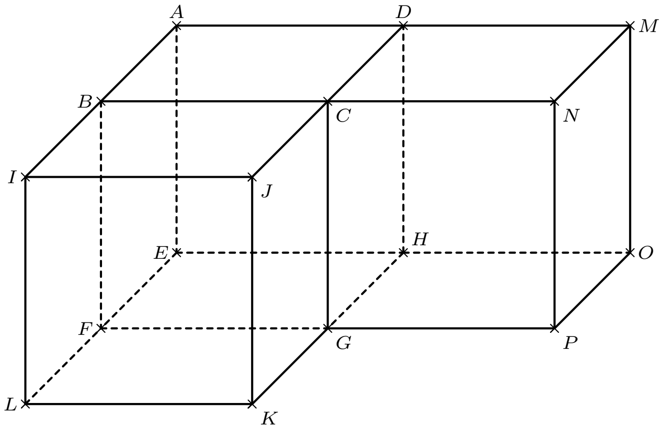
3 Deux droites parallèles sont forcément ... .

5 Si une droite et un plan sont sécants alors leur intersection est un ... .

9 Si $\mathscr{P}_3$ est un plan sécant avec deux plans parallèles $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ alors l'intersection de $\mathscr{P}_3$ avec $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est formée de deux droites ... .

11 La ... d'un cylindre par un plan peut-être un disque, une ellipse ou un rectangle.

**Exercice 2 :**
La figure ci-dessous est constituée de trois cubes identiques.




**Partie A :**

1) Parmi ces droites, une seule n'est pas parallèle à la droite $(HM)$. Laquelle ?
   a) $(FC)$ ; b) $(FD)$ ; c) $(LJ)$ ; d) $(DE)$.
2) Parmi ces plans, un seul n'est pas parallèle au plan $(DBE)$. Lequel ?
   a) $(GLB)$ ; b) $(MCH)$ ; c) $(GJL)$ ; d) $(NJG)$.
3) Parmi ces droites, une seule n'est pas orthogonale à la droite $(AE)$. Laquelle ?
   a) $(OP)$ ; b) $(KL)$ ; c) $(HF)$ ; d) $(NF)$.

**Partie B :**
Déterminer, en utilisant deux points de la figure, un représentant de chacune des sommes vectorielles suivantes :

a) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}$ ; b) $\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{EL}$ ; c) $\overrightarrow{LF}+\overrightarrow{BN}$ ;

d) $\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{HD}$ ; e) $\overrightarrow{NH}+\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{KB}$ ; f) $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{NO}$.

**Partie C :**

1) Dans le plan $(EHG)$, on considère le repère orthonormé $\left(E\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}\right)$.
   Dans ce repère, le point $E$ a pour coordonnées $(0\,;0)$ et le point $P$, par exemple, a pour coordonnées $(1\,;2)$ car : $\overrightarrow{EP}=1\times\overrightarrow{EF}+2\times\overrightarrow{EH}$.
   Quelles sont les coordonnées des points $F$, $K$, $G$ et $O$ ?
2) On munit maintenant l'espace du repère orthonormé $\left(E\,;\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EA}\right)$.
   Dans ce repère, le point $G$, par exemple, a pour coordonnées $(1\,;1\,;0)$.
   En effet, $\overrightarrow{EG}=1\times\overrightarrow{EF}+1\times\overrightarrow{EH}+0\times\overrightarrow{EA}$.
   Pour donner un autre exemple, le point $N$ a pour coordonnées $(1\,;2\,;1)$.
   Quelles sont les coordonnées des points $C$, $M$, $J$ et $I$ ?

# IX Fiche 9 – Fonctions trigonométriques

**Prérequis :**

✗ Le radian.

✗ Cercle trigonométrique et enroulement de la droite numérique.

✗ Valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

**Exercice 1 :**

1) Tracer le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans un repère $(O\,;I,J)$ en prenant pour unité 4 cm.
2) Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique, images des nombres donnés :

a) $A\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ ; b) $B\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ; c) $C\left(\dfrac{13\pi}{6}\right)$ ; d) $D\left(-\dfrac{28\pi}{3}\right)$ ;

e) $E\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ ; f) $F\left(\dfrac{17\pi}{6}\right)$ ; g) $G\left(\dfrac{31\pi}{4}\right)$ ; h) $H\,(-27\pi)$.

**Exercice 2 :**

Calculer chaque expression sans utiliser la calculatrice. Donner si nécessaire le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)$ ; b) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ ;

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ ; d) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi)$.

**Exercice 3 :**

On considère un réel $x$ tel que : $\sin(x)=\dfrac{3}{7}$ et $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

1) Placer le point $M$ associé au réel $x$ sur le cercle trigonométrique.
2) Déterminer la valeur exacte de $\cos(x)$.
3) Donner un arrondi de $x$ à 0,01 radian près.

**Exercice 4 :**

Soit $x$ un nombre réel.
Démontrer que :

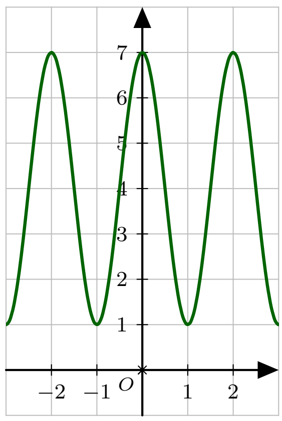
a) $(\cos(x)+\sin(x))^2+(\cos(x)-\sin(x))^2=2$ ; b) $\sin^4(x)+2\sin^2(x)\cos^2(x)+\cos^4(x)=1$ ;

c) $\cos^4(x)-\sin^4(x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)$.

**Exercice 5 :**

1) Tracer le cercle trigonométrique puis placer les points $A$ et $B$ de ce cercle d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
2) Déterminer les réels $x$ de l'intervalle $[0\,;2\pi[$ tels que $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$.
3) Déterminer les réels $x$ de l'intervalle $[0\,;2\pi[$ tels que $\cos(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$.

**Exercice 6 :**




Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=4+3\cos(\pi x)$ dont on donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}_g$.

1) Par lecture graphique, conjecturer la parité et la périodicité de $g$ ainsi qu'un encadrement le plus précis possible par deux entiers de $g(x)$ pour tout $x$ réel.
2) Démontrer ces conjectures.

# X Fiche 10 – Fonction exponentielle

**Prérequis :**

✗ Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

✗ Savoir déterminer la dérivée d'une fonction ainsi que son signe.

✗ Savoir résoudre des équations et des inéquations dans lesquelles interviennent des exponentielles.

**Exercice 1 :**
Simplifier l'écriture de chacun des nombres suivants où $x$ désigne un nombre réel.

- $A = \mathrm{e}^{3x} \times \mathrm{e}^{-4x}$ ;
- $B = \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^6}$ ;
- $C = \dfrac{\mathrm{e}^{3-2x} \times \left(\mathrm{e}^{x}\right)^5}{\mathrm{e}^{x-2}}$ ;
- $D = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^5 \times \mathrm{e}^{-x}$ ;
- $E = \dfrac{\mathrm{e}^{2x-5}}{\mathrm{e}^{2x-7}}$ ;
- $F = \dfrac{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{2x-1}}{2\,\mathrm{e}^{-x-2}}$.

**Exercice 2 :**
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} + 3x - 1$ ;

b) $g(x) = \left(x^2 + 2x - 1\right)\mathrm{e}^{x}$ ;

c) $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} - x}$ ;

d) $k(x) = (2x + 1)\,\mathrm{e}^{-2x}$.

**Exercice 3 :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{2x} = 1$ ;

b) $\dfrac{\mathrm{e}^{3x-1}}{\mathrm{e}^{4x+4}} = \mathrm{e}^{-x+2}$ ;

c) $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{x-3}$ ;

d) $\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right) = 0$ ;

e) $x\,\mathrm{e}^{2x+1} = x$ ;

f) $\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x} - 3 = 0$.

**Exercice 4 :**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{x-2} < 1$ ;

b) $\mathrm{e}^{-3x-1} - \mathrm{e}^{x+5} \leqslant 0$ ;

c) $\mathrm{e}^{-x^2-3x+5} > \mathrm{e}$.

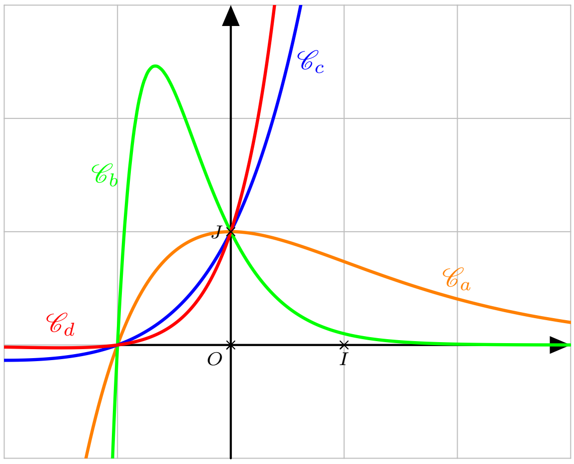
**Exercice 5 :**
Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1 + x\,\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation dans un repère du plan.

1) Soit $g$ la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 1$.
   a) On note $g'$ la dérivée de $g$. Exprimer, pour tout $x$ réel, $g'(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2) a) Démontrer que, pour tout $x$ réel, on a : $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,g(x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

**Exercice 6 :**
Pour tout entier $k$, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + 1)\,\mathrm{e}^{kx}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$.

1) Vérifier que, pour tout entier $k$, les points $A\,(-1\,;0)$ et $B\,(0\,;1)$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2) a) Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de l'expression : $(x + 1)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)$.
   b) En déduire, pour un entier $k$ donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3) a) Calculer $f_k'(x)$ pour tout $x$ réel et pour tout entier $k$ non nul.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction $f_k$ suivant les valeurs de $k$ non nulles. On distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$.

4) Le graphique ci-dessous représente quatre courbes correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre $k$ parmi les entiers $-3$, $-1$, $1$ et $2$.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



# XI Fiche 11 – Algorithmique

**Prérequis :**

- ✗ Affectations.
- ✗ Boucles « Pour » et boucles « Tant que ».
- ✗ Instructions conditionnelles « Si … alors … sinon ».

**Exercice 1 :**
Compléter les algorithmes suivants :

**Algorithme 1 :** On cherche à résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

$\Delta \longleftarrow b^2 - 4ac$
Si $\Delta < 0$ alors
- Afficher ..............................

Sinon
- Si $\Delta = 0$ alors
  - $x \longleftarrow$ ..............................
  - Afficher $x$
- Sinon
  - $x \longleftarrow$ ..............................
  - $y \longleftarrow$ ..............................
  - Afficher $x$
  - Afficher $y$
- Fin Si

Fin Si

**Algorithme 2 :** On travaille avec certaines propriétés des vecteurs.
On considère les points $A$, $B$, $C$ et $D$ de coordonnées respectives $(x_A\,; y_A)$, $(x_B\,; y_B)$, $(x_C\,; y_C)$ et $(x_D\,; y_D)$ tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

$s \longleftarrow$ ..............................
$t \longleftarrow$ ..............................
$u \longleftarrow$ ..............................
$v \longleftarrow$ ..............................
Afficher « Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : »
Afficher $(s\,; t)$
Afficher « Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CD}$ sont : »
Afficher $(u\,; v)$
Si $sv - tu = 0$ alors
- Afficher « Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont .............................. »
- Afficher « Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont .............................. »

Fin Si
Si $su + tv = 0$ alors
- Afficher « Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont .............................. »
- Afficher « Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont .............................. »

Fin Si

**Algorithme 3 :** Une équation de cercle.

```
d ⟵ (x − ·········)² + (y − ·········)²
Si d ≤ 25 alors
    Si d = 25 alors
        Afficher « Le point M (x ; y) appartient au cercle de centre A (1 ; −2) et de rayon ......... »
    Sinon
        Afficher « Le point M (x ; y) appartient ................................................ »
    Fin Si
Fin Si
```

**Exercice 2 :**
L'algorithme suivant permet de calculer les 50 premières valeurs de la suite appelée « suite de Syracuse ».

```
Pour p allant de 1 à 50
    Si u est pair alors
        u ⟵ u/2
    Sinon
        u ⟵ 3u + 1
    Fin Si
    Afficher u
Fin Pour
```

1) Démontrer que si, à n'importe quelle étape de l'algorithme, $u$ prend la valeur 1 alors la suite devient cyclique (c'est-à-dire qu'elle produit un cycle de résultats qui se répètent à l'identique indéfiniment).
2) Quel sera l'affichage si on entre pour $u$ :
   a) la valeur 5 ?  b) la valeur 30 ?

**Exercice 3 :**
En janvier, une entreprise agroalimentaire produit de manière industrielle une grande quantité de galettes des rois. On considère que, par erreur, 8 % des galettes produites ne contiennent pas de fève.
Une grande surface commande un échantillon de $n = 200$ galettes issues de cette production.
L'algorithme suivant simule la constitution aléatoire d'un échantillon de 200 galettes.

```
c ⟵ 0
Pour n allant de 1 à 200
    x ⟵ nombre réel aléatoire dans [0 ; 1[
    Si x < 0,08 alors
        c ⟵ c + 1
    Fin Si
Fin Pour
Afficher c/200
```

1) Justifier l'instruction « Si $x < 0{,}08$ ».
2) Quel est le rôle de la variable $c$ ?
3) À quoi correspond la valeur affichée à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
4) On réalise un très grand nombre de fois cet algorithme. À l'aide de la loi binomiale, indiquer la valeur moyenne de $c$ à laquelle on peut s'attendre.

5) On effectue des modifications et on donne maintenant l'algorithme ci-dessous. Que fait cet algorithme ?

```
c ⟵ 0
n ⟵ 0
Tant que c < 50
    x ⟵ nombre réel aléatoire dans [0 ; 1[
    Si x < 0,08 alors
        c ⟵ c + 1
    Fin Si
    n ⟵ n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

**Exercice 4 :**
Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On donne l'algorithme suivant :

$h \longleftarrow 1$

Pour $I$ allant de 1 à 5

$\quad d \longleftarrow \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$\quad$ Afficher $d$

$\quad h \longleftarrow \dfrac{h}{10}$

Fin Pour

| $I$ | $d$ | $h$ |
|---|---|---|
| 1 | 7 | 0,1 |
| 2 | 6,1 | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

1) On choisit la fonction définie par $f(x) = x^2$ et on saisit $a = 3$.
   a) Quelle est la valeur de $f(a)$ ? Quelle est la valeur de $f(a+h)$ au début de l'algorithme (pour $h = 1$) ?
   b) Compléter le tableau donné ci-dessus.
   c) Vers quelle valeur semble tendre $d$ ? Quelle définition donne-t-on à cette valeur ?
   d) Quel sera, approximativement, le dernier nombre affiché si on choisit $a = 5$ ?
2) L'exécution de cet algorithme, avec une autre fonction et $a = 0$, donne l'affichage ci-dessous. Quelle conjecture pouvez-vous formuler sur cette fonction ?

```
           100
   316,227 766
         1 000
  3 162,277 66
        10 000
  31 622,776 6
          Fait
```