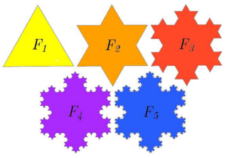


Suites numériques

Terminale S

Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :
- ✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$
- ✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations

- ✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante
- ✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : nbre termes $\times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$S_n = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Suites géométriques

Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1-q}$

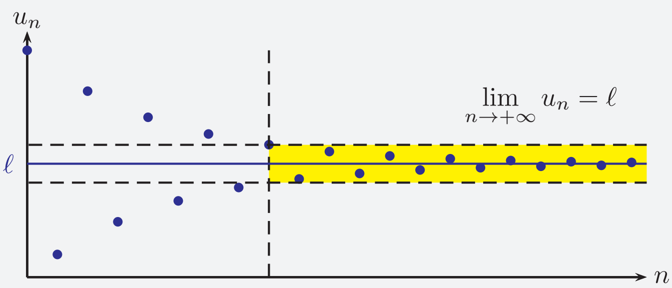
$S_n = 1 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

Raisonnement par récurrence

But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$
- ✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0
- ✧ Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $n+1$

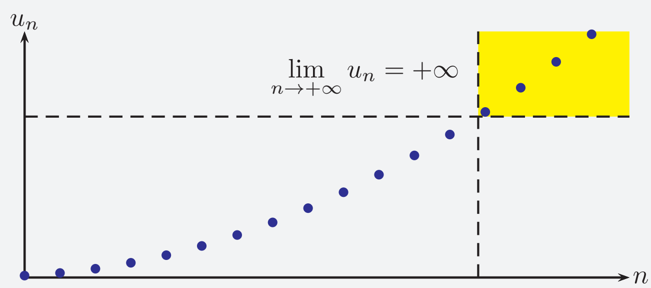
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n$ n'existe pas

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \to +\infty} n^2 = \lim_{n \to +\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :
- ✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- ✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- ✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$

Limites d'une suite géométrique

- ✧ Si $q \leq -1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas
- ✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- ✧ Si $q = 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
- ✧ Si $q \geq 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

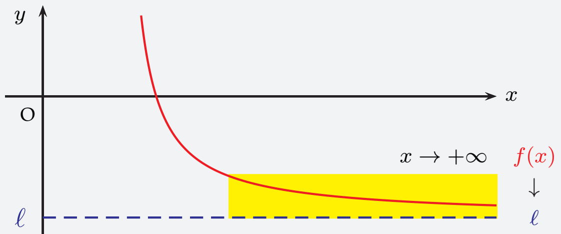
Convergence d'une suite monotone

Une suite (u_n) est majorée [resp. minorée] si, et seulement si, il existe un réel M [resp. m] tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ [resp. $u_n \geq m$]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée
- ✧ Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge
- ✧ Une suite croissante de limite ℓ est majorée par ℓ

Limites et continuité

Terminale S

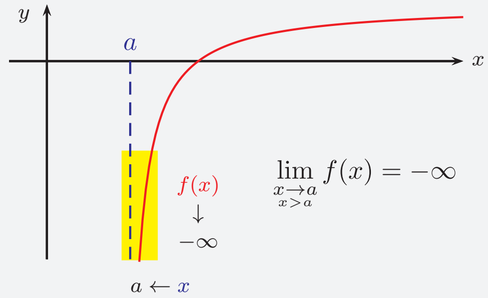
Asymptote horizontale



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$

Asymptote verticale

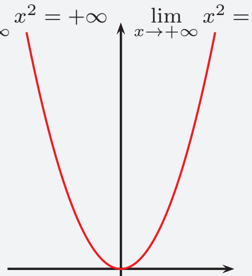


$$\lim_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

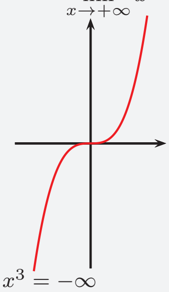
Limites des fonctions usuelles

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$



carré

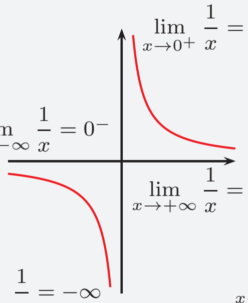
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

cube

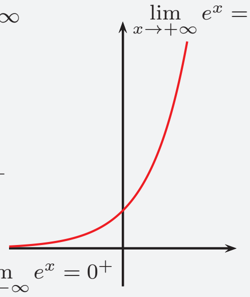
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+$



$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$

inverse

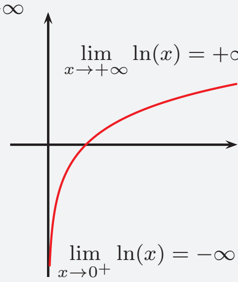
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

exponentielle

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

logarithme

Opérations sur les limites

$\lim f$	0	0	∞	0	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim g$	0	∞	0	ℓ	0	∞	ℓ	∞
$\lim(f+g)$	0	∞	∞	ℓ	ℓ	∞	∞	∞/FI
$\lim(f\times g)$	0	FI	FI	0	0	∞	∞	∞
$\lim(f\div g)$	FI	0	∞	0	∞	0	∞	FI

$\ell \neq 0$, règle des signes pour les résultats « ∞ »

Théorèmes de comparaison

f, g, h sont trois fonctions. Si, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$
- ✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- ✧ théorème des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$

Limites particulières

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

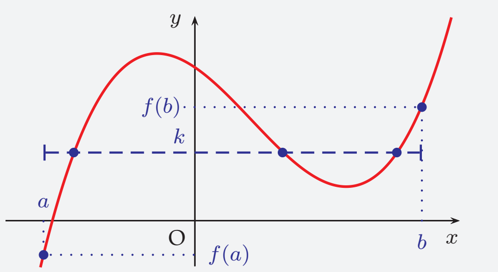
Fonctions composées

$$\underbrace{x \xmapsto{f} f(x) \xmapsto{g} g(f(x))}_{g\circ f}$$

si $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{X\to\ell} g(X) = L \end{cases}$

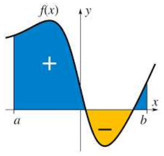
alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = L$

Théorème des valeurs intermédiaires



Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [a\,;b]$

Si de plus f est strictement monotone, α est unique



Dérivation et intégration

Terminale S

Dérivée et tangente

Nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Tangente au point $A(a, f(a))$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Primitive

Primitive de f sur I : fonction F continue, dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

dérivée	k	x^n	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	primitive
	0	$n\,x^{n-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	

dérivée	$u+v$	$u \times v$	ku	u^n	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u}{v}$	e^u	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$	primitive
	$u'+v'$	$u'v+uv'$	ku'	$nu'u^{n-1}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$u'\,\mathrm{e}^u$	$\dfrac{u'}{u}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$	

Variations d'une fonction

- ✧ f croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Propriétés des primitives

- ✧ Toute fonction continue admet des primitives
- ✧ Primitives de f : fonctions G telles que $G(x) = F(x)+k$
- ✧ Si de plus $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique

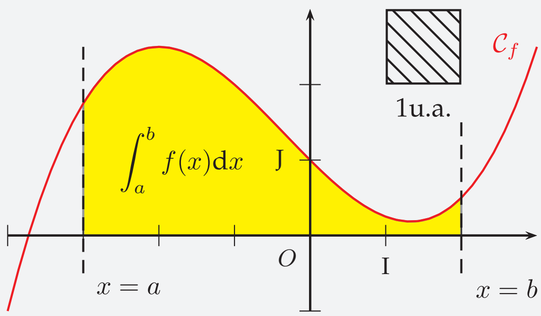
Intégrale

Intégrale de f positive sur $[a,b]$: aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

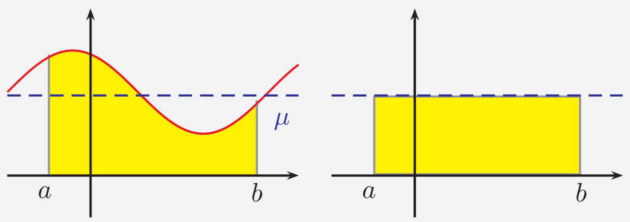
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ

Si f est négative, l'aire vaut $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Calcul d'intégrales

- ✧ Soit f continue positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, la fonction F définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ✧ Valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Propriétés des intégrales

f et g sont deux fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$:

- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
- ✧ $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exponentielle et logarithme

Terminale S

N.Daval

Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$

définie sur $\mathbb{R}$

à valeurs dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$\mathrm{e}^0 = 1$

$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,718$

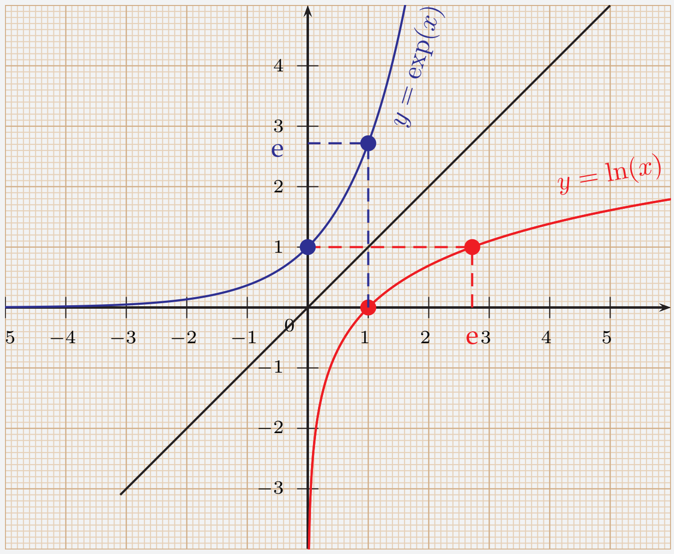
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$

définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(\mathrm{e}) = 1$

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

- Produit : $\mathrm{e}^a \times e^b = \mathrm{e}^{a+b}$
- Inverse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$
- Quotient : $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
- Puissance : $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{an}$
- Racine carrée : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

- Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- Inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- Quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- Puissance : $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- Racine carrée : $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

- $\ln(\exp x) = x$ $\qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x$
- $\exp(\ln x) = x$ $\qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
- $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $\qquad \mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y)$
- $x^y = \exp(y\ln(x))$ $\qquad x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

- $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^v \iff u = v$ $\qquad \mathrm{e}^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- $\mathrm{e}^u > \mathrm{e}^v \iff u > v$ $\qquad \mathrm{e}^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- $\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^v \iff u \leq v$ $\qquad \mathrm{e}^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- $\mathrm{e}^u \leq 0$ impossible et $\mathrm{e}^u > 0$ toujours vrai

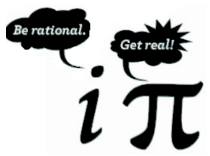
Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

- $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\qquad \ln(u) = \lambda \iff u = \mathrm{e}^\lambda$
- $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\qquad \ln(u) > \lambda \iff u > \mathrm{e}^\lambda$
- $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\qquad \ln(u) \leq \lambda \iff u \leq \mathrm{e}^\lambda$
- $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissance comparée et limites particulières

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$



Nombres complexes

Terminale S

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

✧ $i^2 = -1$

✧ $a = \mathfrak{Re}(z) \to$ partie réelle

$b = \mathfrak{Im}(z) \to$ partie imaginaire

✧ Conjugué : $\overline{z} = a - ib$

✧ $\mathbb{C}$ = {nombres complexes}

Forme trigonométrique

$$z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

✧ Module :

$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

✧ Argument :

$\arg(z) = \theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})\,[\,2\pi]$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$; $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$

Forme exponentielle

$$z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

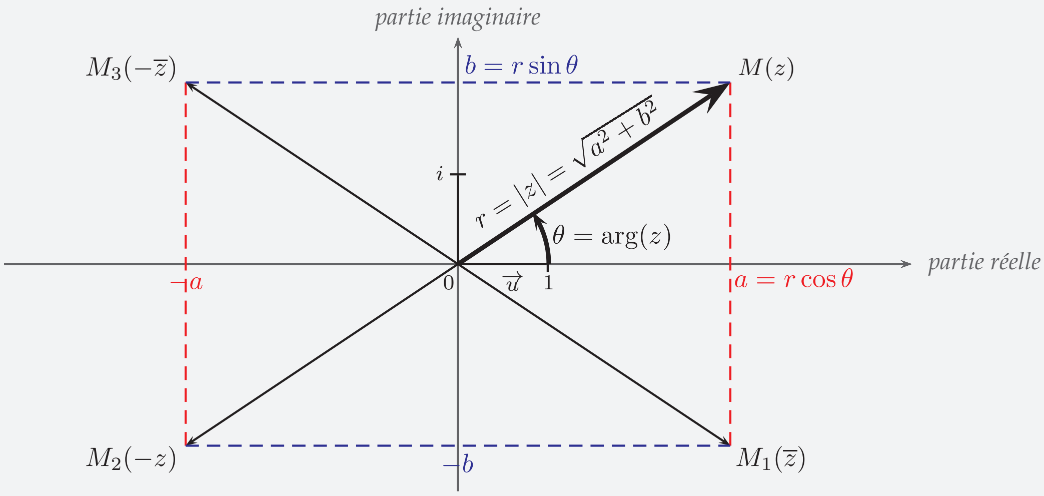
✧ $r = |z| > 0$

✧ $\theta = \arg(z)$

✧ $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

✧ $\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$

Représentation graphique



Propriétés du conjugué

✧ $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

✧ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

✧ $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

✧ $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

✧ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

✧ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$

✧ $z = 0 \iff \mathfrak{Re}(z) = \mathfrak{Im}(z) = 0$

Propriétés du module/argument

✧ $|-z| = |\overline{z}| = |z|$

✧ $|zz'| = |z|\,|z'|$

✧ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\;[2\pi]$

✧ $|z^n| = |z|^n$

✧ $\arg(z^n) = n\arg(z)\;[2\pi]$

✧ $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

✧ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\;[2\pi]$

Propriété de l'exponentielle

✧ $r\mathrm{e}^{i\theta} \times r\mathrm{e}^{i\theta'} = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$

✧ $\left(r\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = r^n\mathrm{e}^{in\theta}$

✧ $\dfrac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\mathrm{e}^{-i\theta}$

✧ $\dfrac{r\mathrm{e}^{i\theta}}{r'\mathrm{e}^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\mathrm{e}^{i(\theta-\theta')}$

✧ $\overline{r\mathrm{e}^{i\theta}} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$

Lien complexes-géométrie

✧ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$

✧ $|z - z_A| = r$: cercle de centre A de rayon r

✧ $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de $[AB]$

✧ $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$

✧ $\arg(z - z_A) = \theta\;[2\pi]$: demi-droite d'origine A d'angle θ

✧ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$

✧ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\iff \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Lien complexes-trigonométrie

Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$

Lien complexes-second degré

$az^2 + bz + c = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$

✧ $\Delta > 0$: 2 racines réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

✧ $\Delta = 0$: 1 racine double $\dfrac{-b}{2a}$

✧ $\Delta < 0$: 2 racines conjuguées $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Géométrie dans l'espace

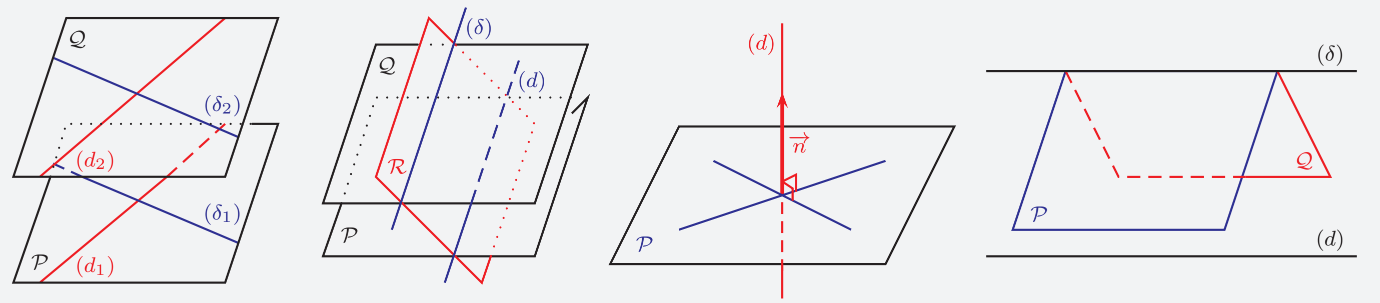
Terminale S

N.Daval

Règles d'incidence

- Si une droite (d) est parallèle à une droite (δ) d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (d) est parallèle au plan $\mathcal{P}$
- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
- Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles
- Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{Q}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles
- Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles
- Une droite (d) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$. Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan. Un vecteur $\overrightarrow{n}$ qui dirige (d) est un vecteur normal à $\mathcal{P}$
- Théorème du toit : si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, alors (d) est parallèle à la droite (δ) d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$

Illustrations des quatre dernières règles



Vecteurs

- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$; $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ coplanaires $\iff \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$

Produit scalaire

Écritures :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

Propriétés :

- $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$
- Deux droites (d) et (δ) de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonales $\iff \overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$
- Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont parallèles ou confondus $\iff \overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n'}$

Coplanarité

Des points ou des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

- $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u}$: droite passant par A de vecteur direct. $\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v}$: plan passant par A de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires
- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$: plan passant par A de vecteurs normal $\overrightarrow{n}$

Représentations paramétriques :

- Droite (d) passant A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$:
  $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$
- Plan $\mathcal{P}$ passant par A dirigé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
  $\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$ avec $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} t, t' \in \mathbb{R}$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}$:

$ax + by + cz + d = 0$ où $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Probabilités discrètes

Terminale S

Rappel sur les probabilités et variables aléatoires

$P(\varnothing)=0$; $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$; $P(\Omega)=1$; $P(\overline{A})=1-P(A)$; $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Espérance : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)$; Variance : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 P(X=x_i)$; Écart-type : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Loi de Bernoulli

Expérience qui n'a que deux issues possibles : « succès » de probabilité p et « échec » de probabilité $1-p$

Notation : $\mathcal{B}(p)$

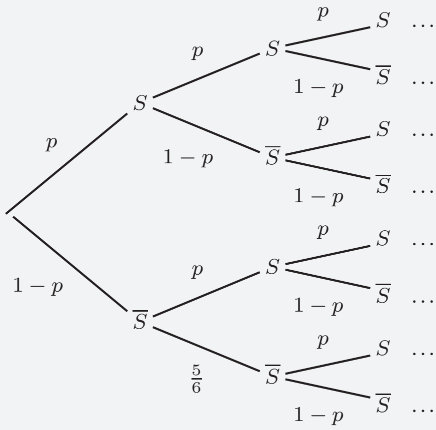
$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$

$E(X)=p$

$V(X)=p(1-p)$

$\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$

Arbre pondéré de la loi binomiale



Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X est égale au nombre de succès.

Notation : $\mathcal{B}(n;p)$; $q=1-p$

$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k \times q^{n-k}$

$E(X)=np$

$V(X)=npq$

$\sigma(X)=\sqrt{npq}$

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé : $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ avec $P(A)\neq 0$

Cas d'équiprobabilité sur Ω : $P_A(B)=\dfrac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(A)}$

Probabilités composées : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

Probabilités totales avec $\{A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\}$ formant une partition de Ω :

$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$

$P(B)=P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)$

Indépendance de deux événements

A et B indépendants

$\iff P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$\iff P_A(B)=P(B)$

$\iff P_B(A)=P(A)$

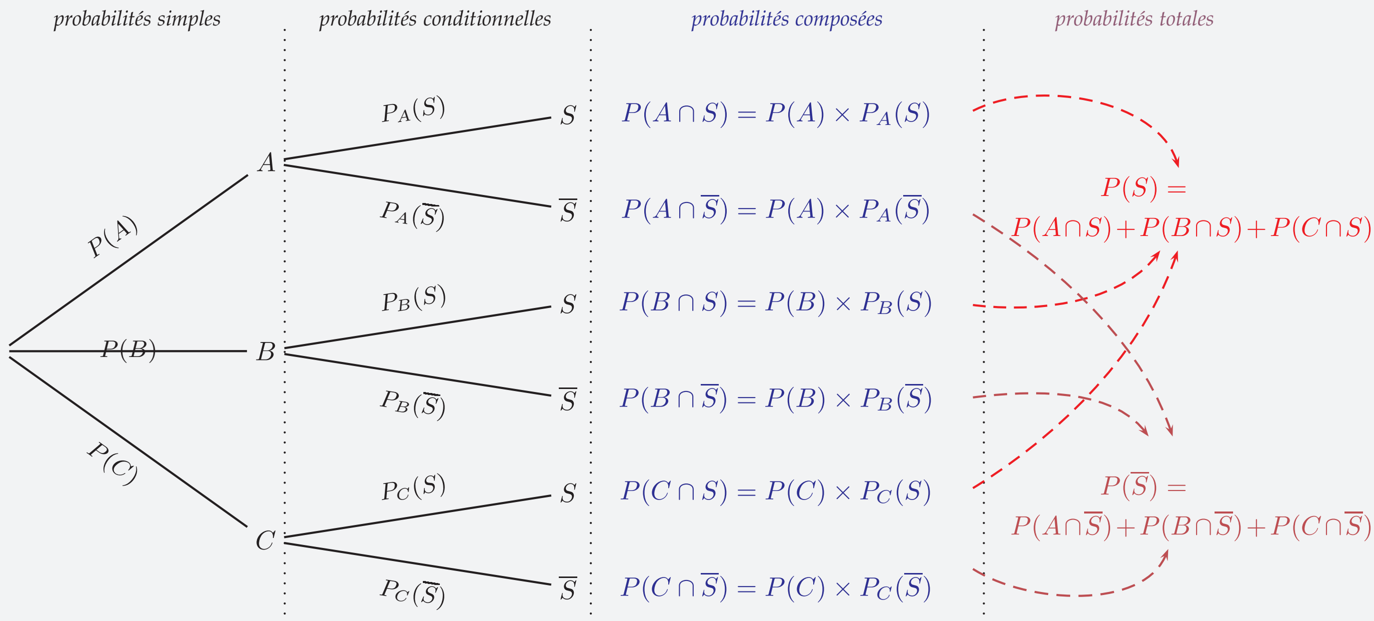
A et B indépendants

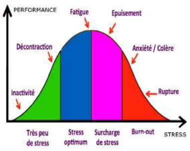
$\iff \overline{A}$ et B indépendants

$\iff A$ et $\overline{B}$ indépendants

$\iff \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants

Arbre de probabilité





Probabilités continues

Terminale S

Variable aléatoire à densité sur I

Fonction de densité sur I : fonction f continue et positive sur I telle que

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

- ✧ $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- ✧ $P(X = a) = 0$
- ✧ $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$
- ✧ $P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t)$
- ✧ $E(X) = \int_I t f(t)\,\mathrm{d}t$

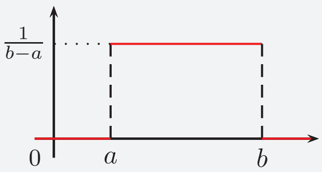
Loi uniforme sur $[\,a\,,b\,]$

Notation : $\mathcal{U}\,[\,a\,,b\,]$

$f(t) = \dfrac{1}{b-a}$

$\mathrm{P}(c \leq X \leq d) = \dfrac{d-c}{b-a}$

$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$



Loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$

Notation : $\mathcal{E}(\lambda)$

$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ avec $\lambda > 0$

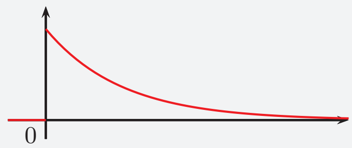
$P(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$

$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$

$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$

$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$



Théorème de Moivre-Laplace

- ✧ $p \in]\,0\,;1\,[$ et $n \in \mathbb{N}^*$
- ✧ X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$
- ✧ $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leq Z_n \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

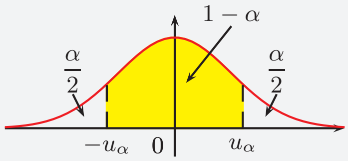
Loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$

Notation : $\mathcal{N}(0;1)$

$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$

$E(X) = 0$ et $V(X) = 1$

$\forall\,\alpha \in]\,0\,;1\,[, \exists!\, u_\alpha \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$



$P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) = 0,95$

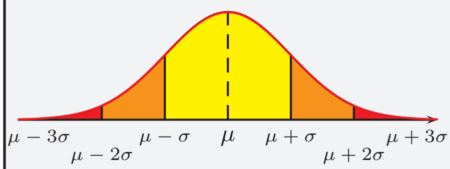
$P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) = 0,99$

Loi normale sur $\mathbb{R}$

Notation : $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

$E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$

X suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2) \iff Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0\,;\,1)$



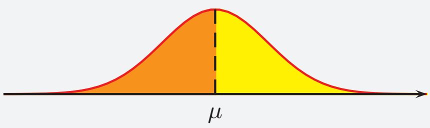
$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,96$

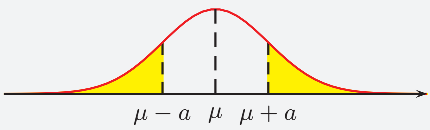
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$

Propriétés des lois normales

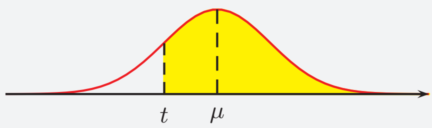
$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5$



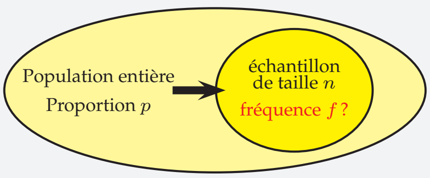
$P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$



$P(X > t) = 0,5 + P(t < X < \mu)$



Intervalle de fluctuation



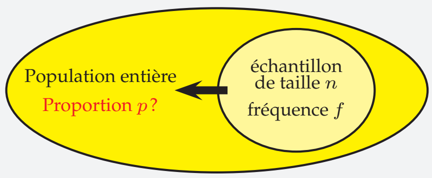
Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $1 - \alpha$

$$I_n = \left[p - u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\;;\; p + u_\alpha\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $np \geq 5$; $n(1-p) \geq 5$

à 95 % : $u_{0,05} = 1,96$ et à 99 % : $u_{0,01} = 2,58$

Intervalle de confiance



Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95 %

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\;;\; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$; $n(1-f) \geq 5$

Arithmétique

Terminale S - Spé

N.Daval

Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Vocabulaire : a est le dividende ; b le diviseur ; q le quotient et r le reste

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

a divise b

$\iff$ b multiple de a

$\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$

✧ Notation : a/b

✧ Réflexivité : a/a

✧ Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} a/b \\ b/c \end{array}\right. \Longrightarrow a/c$

✧ Linéarité : $\left\{\begin{array}{l} a/b \\ a/c \end{array}\right. \Longrightarrow a/bu + cv$

✧ Lien avec les congruences : $a/b \iff b \equiv 0(a)$

✧ Lien avec le PGCD : $a/b \iff PGCD(a, b) = a$

Congruence dans $\mathbb{Z}$

a et b ont même reste dans la division euclidienne par n

$\iff$ a est congru à b modulo n

$\iff$ $a - b$ est multiple de n

✧ Notation : $a \equiv b\,(n)$

✧ Réflexivité : $a \equiv a\,(n)$

✧ Symétrie : $a \equiv b\,(n) \Longrightarrow b \equiv a\,(n)$

✧ Transitivité : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\,(n) \\ b \equiv c\,(n) \end{array}\right. \Longrightarrow a \equiv c\,(n)$

✧ Addition : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\,(n) \\ a' \equiv b'\,(n) \end{array}\right. \Longrightarrow a + a' \equiv b + b'\,(n)$

✧ Multiplication : $\left\{\begin{array}{l} a \equiv b\,(n) \\ a' \equiv b'\,(n) \end{array}\right. \Longrightarrow aa' \equiv bb'\,(n)$

✧ Puissance : $a \equiv b\,(n) \Longrightarrow a^k \equiv b^k\,(n)$

Nombres premiers

Un entier p supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même

Théorème fondamental de l'arithmétique : tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose de manière unique à l'ordre des facteurs près en produit de facteurs premiers : on note $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$

Critère d'arrêt : si n n'admet pas de diviseur premier p tel que $2 \leq p \leq \sqrt{n}$ alors n est premier

PGCD, PPCM

L'ensemble des diviseurs communs à a et b admet un plus grand élément noté PGCD(a, b)

L'ensemble des multiples communs à a et b admet un plus petit élément noté PPCM(a, b)

✧ Si $\left\{\begin{array}{l} a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} \\ b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} \end{array}\right.$ alors $\left\{\begin{array}{l} \text{PGCD}(a, b) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} \\ \text{PPCM}(a, b) = p_1^{M_1} p_2^{M_2} \dots p_n^{M_n} \end{array}\right.$ où $m_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$ et $M_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$

✧ PGCD$(ka, kb) = k$PGCD(a, b)

✧ Si $a = bq + r$, alors PGCD$(a, b) =$ PGCD(b, r)

✧ Le PGCD de deux nombres non nuls est le dernier reste non nul de la suite des divisions de l'algorithme d'Euclide

Théorème de Bézout

✧ PGCD$(a, b) = 1$

$\iff$ a et b sont premiers entre eux

$\iff$ il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

✧ Identité de Bézout : PGCD$(a, b) = d$

$\Longrightarrow$ il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$

✧ Corollaire de Bézout : l'équation $ax + by = c$ admet des solutions entiers $\iff$ c est multiple de PGCD(a, b)

Théorème de Gauss

$\left\{\begin{array}{l} a/bc \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow a/c$

Corollaires :

✧ $\left\{\begin{array}{l} a/c \text{ et } b/c \\ \text{PGCD}(a, b) = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow ab/c$

✧ $\left\{\begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p/ab \end{array}\right. \Longrightarrow p/a \text{ ou } p/b$

Matrices et suites

Terminale S - Spé

Vocabulaire des matrices

matrice $m \times n$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

matrice ligne : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$

matrice colonne : $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$

matrice diagonale : $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

matrice unité : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$A = (a_{ij})$: matrice de coefficients a_{ij} (ligne i, colonne j)

$m = n$: matrice carrée d'ordre n

matrice unité : I_n ou I

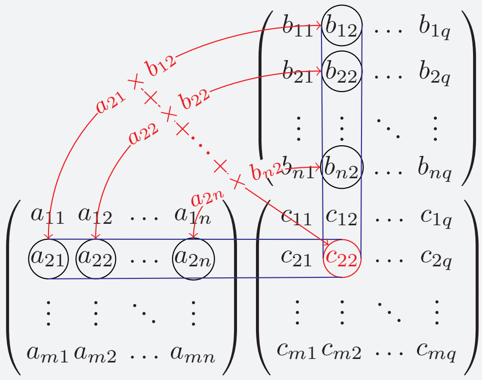
Opérations avec des matrices

$A = (a_{ij})$ est une matrice de dimension $m \times n$

$B = (b_{ij})$ est une matrice de dimension $p \times q$

Pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$:

- ✧ $A = B \iff m = p\,;\, n = q$ et $a_{ij} = b_{ij}$
- ✧ $C = A + B$ avec $m = p$ et $n = q$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- ✧ $C = kA$: $c_{ij} = ka_{ij}$
- ✧ $C = A \times B$: $c_{ij} =$ ligne $i_{|A} \times$ colonne $j_{|B}$
- ✧ $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ si $n \neq 0$ et $A^0 = I$



$(kA)B = k(AB)$

$ABC = (AB)C$
$= A(BC)$

$A(B + C) = AB + BC$

$(A + B)C = AC + BC$

$AI = IA = A$

⚠ en général :
$AB \neq BA$

Inverse d'une matrice

- ✧ A matrice carrée inversible $\iff$
  il existe B tel que $AB = BA = I$
  Notation : $B = A^{-1}$
- ✧ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversible $\iff$
  $\det(A) = ad - bc \neq 0$
  $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Résolution d'un système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{array}\right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}$$

- ✧ Écriture : $AX = B$
- ✧ Condition de solution (unique) : A inversible
- ✧ Solution : $X = A^{-1}B$

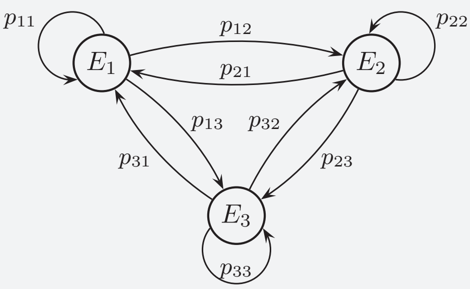
Marche aléatoire

Un système qui a n états possibles $E_1, E_2, \ldots E_n$ qui évolue de l'un à l'autre par étapes successives aléatoires suit une marche aléatoire à n états

On note P_n la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant n

$P_n = (P(X_n = E_1)\ P(X_n = E_2)\ \ldots\ P(X_n = E_n))$

graphe probabiliste



matrice de transition

$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$

avec : $0 \leq p_{ij} \leq 1$ et

$p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$

$p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$

$p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$

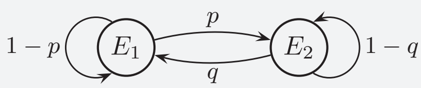
- ✧ $P_{n+1} = P_n \times T$ et $P_n = P_0 \times T^n$
- ✧ Un état probabiliste P est stable $\iff P \times T = P$

Suites $U_{n+1} = AU_n$

Une suite de matrices converge $\iff$ toutes les suites formant les éléments de cette matrice converge

- ✧ Si $U_{n+1} = AU_n$ alors $U_n = A^nU_0$

Cas particulier de deux états



$T = \begin{pmatrix} 1 - p & p \\ q & 1 - q \end{pmatrix}$

Si $(p\,;q) \neq (0\,;0)$ et $(p\,;q) \neq (1\,;1)$ alors P_n converge