



Fonction exponentielle

I Définition

Théorème 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

On appelle cette fonction : fonction exponentielle et on la note provisoirement $\exp$.

Conséquences immédiates liées à la définition de la fonction exponentielle

- La fonction exponentielle, $\exp : x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- $\exp(0) = 1$

Nombre d'Euler

- On pose $\exp(1) = e$; on obtient $e \simeq 2,718$, e est appelé le nombre d'Euler.
- On généralise à l'ensemble des nombres réels : $\exp(x) = e^x$

Remarque : e^x se dit « exponentielle x » ou « e exposant n »

Histoire des mathématiques

Comme π , le nombre e est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.

Ses premières décimales sont : $e \simeq 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957496...$

Le nombre e est également un nombre transcendant. On dit qu'un nombre est transcendant s'il n'est solution d'aucune équation à coefficients entiers.

Le nombre $\sqrt{2}$ par exemple, est irrationnel mais n'est pas transcendant puisqu'il est solution de l'équation $x^2 = 2$. Un tel nombre est dit « algébrique ».

Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse **Leonhard Euler** (1707 ; 1783). C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre.

Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.

Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748, Euler explique que : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$

Rappelons que, par exemple, $5!$ se lit "factoriel 5" et est égal à $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$.

Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.

Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e





II Etude de la fonction exponentielle

Variations

La fonction exponentielle f tel que $f(x) = \exp(x) = e^x$

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- f est strictement positive sur $\mathbb{R}$
- $f'(x) = \exp(x) = e^x$
- f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
Variation de $\exp$	0 ↗ $+\infty$	

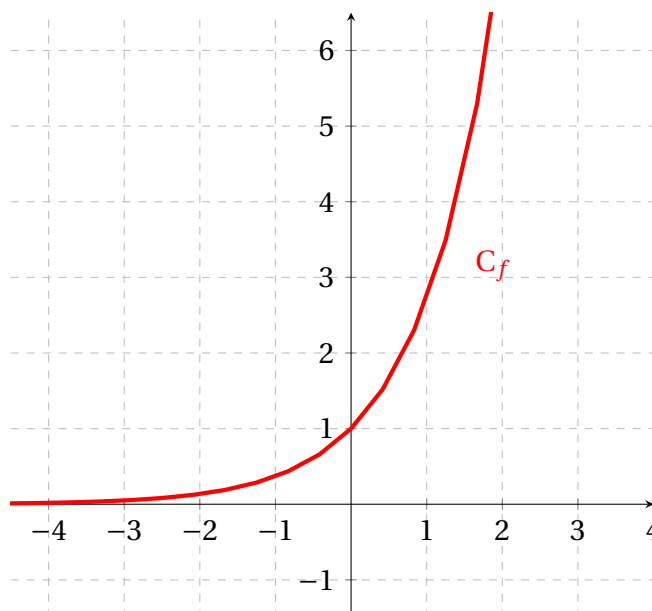
Démonstration :

La fonction f est définie, dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

Alors $f'(x) = \exp(x) = e^x > 0$

Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Courbe représentative :





III Propriétés de la fonction exponentielle

Conséquences liées à cette nouvelle notation

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- Pour tous nombres a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$ $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Pour tout nombre a , et pour tout entier relatif n , $(e^a)^n = e^{a \times n}$

Remarque : La fonction exponentielle transforme les sommes en produit

Exemples : Simplifier les expressions : $\frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{4x}}$, $(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$ et $(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2$

$$\frac{(e^x)^2 \times e^x}{e^{4x}} = \frac{e^{2x} \times e^x}{e^{4x}} = \frac{e^{2x+x}}{e^{4x}} = \frac{e^{3x}}{e^{4x}} = e^{3x-4x} = e^{-x}$$

▪

$$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 &= (e^{2x} + 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^0 - e^{-2x} \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

▪

$$\begin{aligned} (e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 &= (e^{2x} + 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) + (e^{2x} - 2 \times e^x \times e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} + e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x} \\ &= 2e^{2x} + 2e^{-2x} = 2(e^{2x} + e^{-2x}) \end{aligned}$$



IV Equations - Inéquations

La fonction exponentielle f tel que $f(x) = \exp(x) = e^x$

- Pour tous réels a et b , $a = b$ est équivalent à $e^a = e^b$
- Pour tous réels a et b , $a \leq b$ est équivalent à $e^a \leq e^b$

Démonstration :

- Raisonnement par l'absurde

Si $a = b$ alors $e^a = e^b$

et réciproquement si $e^a = e^b$ et on suppose $a \neq b$ avec $a < b$,

comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

alors $e^a < e^b$

ce qui contredit l'hypothèse donc $a = b$.

- Cela découle du fait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Exemples :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-5x+1} = 1$.

$$e^{-5x+1} = 1 \Leftrightarrow e^{-5x+1} = e^0 \Leftrightarrow -5x+1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc } S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 0$.

$$e^{2x} = 0$$

Comme la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

Donc l'équation $e^{2x} = 0$ n'a pas de solution.

$$\text{Donc } S = \emptyset$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2} = e^4$.

$$e^{x^2} = e^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$$\text{Donc } S = \{-2; 2\}$$



- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-5x+1} > 1$

Soit x un réel

$$e^{-5x+1} > 1 \Leftrightarrow -5x+1 > 0 \Leftrightarrow -5x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{-1}{-5} \Leftrightarrow x < \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc } S = \left] -\infty; \frac{1}{5} \right[$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3x} \leq e^{-2}$

Soit x un réel.

$$e^{x^2-3x} \leq e^{-2} \Leftrightarrow x^2-3x \leq -2 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq 0$$

Le discriminant du trinôme x^2-3x+2 est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$

L'équation $x^2-3x+2=0$ admet donc deux racines distinctes : $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

Le cours sur le signe d'un trinôme du second degré nous permet alors de donner le signe du trinôme x^2-3x+2 :

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
x^2-3x+2	+	0	0	+

$$\text{Donc } S = [1; 2]$$



V Fonctions de la forme e^u

Propriétés (admisses)

Soit u une fonction définie sur un intervalle I .

On considère la composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle : $x \mapsto u(x) \mapsto e^{u(x)}$.

On note e^u cette composée.

Par conséquent :

- l'ensemble de définition de la fonction e^u est le même que celui de u
- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors e^u est dérivable sur I et $(e^u)' = u' \times e^u$
- La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u

Remarque : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ alors sa dérivée est $f'(x) = ae^{ax+b}$

Exemples : Dériver les fonctions f , g , h et k sur les intervalles indiqués.

- $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$

On remarque que $f = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = -x$ et $u'(x) = -1$

Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (-1) \times e^{-x} = -e^{-x}$

- $g(x) = e^{3x+4}$ sur $\mathbb{R}$

On remarque que $g = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = 3x+4$ et $u'(x) = 3$

Donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3 \times e^{3x+4} = 3e^{3x+4}$

- $h(x) = e^{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}$

On remarque que $h = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = 1-x^2$ et $u'(x) = -2x$

Donc la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -2x \times e^{1-x^2} = -2xe^{1-x^2}$

- $k(x) = e^{-4x + \frac{2}{x}}$ sur $]0; +\infty[$

On remarque que $k = e^u$ avec u dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u(x) = -4x + \frac{2}{x}$ et $u'(x) = -4 + \frac{-2}{x^2}$

Donc la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = \left(-4 + \frac{-2}{x^2}\right) e^{-4x + \frac{2}{x}}$