Correction - Exercices de mise en route sur les fonctions

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$.

1. Déterminer le sens d variation de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Correction

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Alors $f'(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
   Comme pour tout x , $(x-3)^2 \geqslant 0$.
   On en déduit que f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
2. On sait que l' l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative C_f de f au point d'abscisse α est : $y = f'(\alpha)(x-\alpha) + f(\alpha)$
   Comme $f'(0) = 9$ et $f(0) = 0$
   Donc Equation de la tangente T_0 est $y = 9x$.

Exercice 2.

Un camion doit parcourir un trajet de 200 km, on suppose que sa vitesse (en km/h) est constante et on la note x.

La consommation de carburant du camion est de $6 + \dfrac{x^2}{800}$ litres de gasoil par heure avec un prix du gasoil au litre de 1 € et le chauffeur est payé 10 € de l'heure.

1. Exprimer le temps de trajet t en fonction de x.
2. En déduire le coût en carburant sur l'ensemble du trajet en fonction de x puis le coût du chauffeur sur l'ensemble du trajet en fonction de x.
3. Montrer que le coût total du trajet en fonction de x est $C(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3200}{x}$.
4. Etudier les variations de la fonction C sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. En déduire quelle doit à être la vitesse du camion pour que le coût total du trajet soit minimal

Correction

1. Le camion fait $200km$ à la vistesse constante de xkm/h
   D'où $t = \dfrac{200}{x}$
   Donc Le temps de trajet est$t = \dfrac{200}{x}$ heures.

2. On a le temps $t = \dfrac{200}{x}$ ainsi que le coût du carburant $6 + \dfrac{x^2}{800}$

   D'où $\left(6 + \dfrac{x^2}{800}\right) \times \dfrac{200}{x} = \dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4}$

   Donc Le coût en carburant est $\dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4}$

   De même le chauffeur est payé 10 € de l'heure

   D'où $\dfrac{200}{x} \times 10 = \dfrac{2000}{x}$

   Donc Le coût du chauffeur est $\dfrac{2000}{x}$ €.

3. Comme le coût en carburant est $\dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4}$ et le coût du chauffeur est $\dfrac{2000}{x}$.

   Alors $\mathrm{C}(x) = \dfrac{1200}{x} + \dfrac{x}{4} + \dfrac{2000}{x} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3200}{x}$.

   Donc le coût total du trajet est $\mathrm{C}(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3200}{x}$.

4. On a $\mathrm{C}(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3200}{x}$.

   Alors la fonction C est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Alors $\mathrm{C}'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3200}{x^2} = \dfrac{x^2 - 12800}{x^2}$.

   Et $\mathrm{C}'(x) = 0$ pour $x = \sqrt{12800} = -\sqrt{6400 \times 2} = -80\sqrt{2}$ ou $x = 80\sqrt{2}$.

   $\mathrm{C}'(x) \geqslant 0$ pour x à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines (sachant que $x > 0$)

   Remarque : on peut se limiter à $x \leqslant 130$ puisque la vitesse maximum en France est 130 km/h (et de toute façon, d'après la théorie de la relativité d'Einstein, aucun objet ne peut avoir une vitesse supérieure à celle de la lumière et encore, à condition d'avoir une masse nulle !)

x	0		$80\sqrt{2}$		130
$\mathrm{C}'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
Variation de C	$\|\|$	$\searrow$	$40\sqrt{2}$	$\nearrow$	

5. Donc le coût du trajet est minimal si la vitesse est égale à $80\sqrt{2}$, soit environ 113 km/h.

Exercice 3. Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Donner l'équation de la droite (T), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Tracer dans un repère la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que ses tangentes.

Correction

Soit la fonction f définie $[-4;4]$ par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On a $f=\dfrac{u}{v}$ alors $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
   On pose $u(x)=x \qquad u'(x)=1$
   $v(x)=x^2+1 \qquad v'(x)=2x$
   D'où $f'(x)=\dfrac{1\left(x^2+1\right)-2x\times x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
   Donc $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
2. On sait que $f'(x)=\dfrac{(1-x)(1+x)}{\left(x^2+1\right)^2}$. Comme pour tout x , $(x^2+1)\geqslant 0$.
   Alors $f'(x)$ est du signe de $(1-x)(1+x)$
   Le numérateur s'annule en -1 et en 1 et est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formée par les racines.
   On en déduit le tableau de variation :

x	-4		-1		1		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$\dfrac{4}{17}$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{4}{17}$

3. On sait que (T) a pour équation $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
   Donc Equation de la tangente T_0 est $y=x$.
4. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que ses tangentes.

Exercice 4.

On dispose d'une feuille cartonnée de forme carrée dont le côté mesure 12 cm. Dans chaque coin de cette feuille, on découpe un carré de côté x de manère à obtenir, par pliage, une boite parallélépipédique sans couvercle. On appelle $\mathrm{V}(x)$ le volume du parallélépipède obtenu.

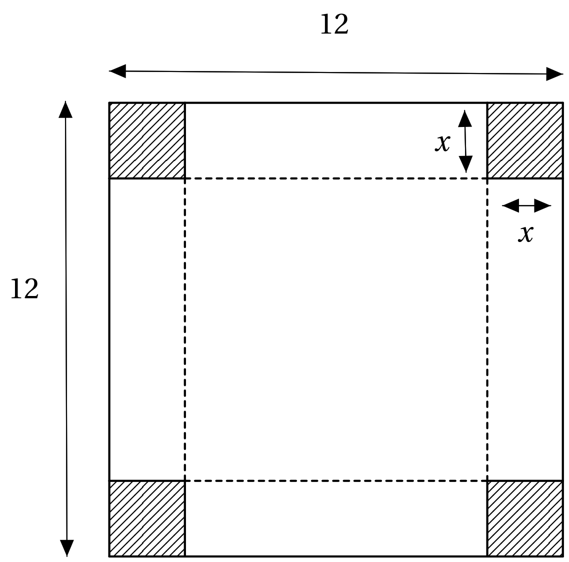


Figure 1

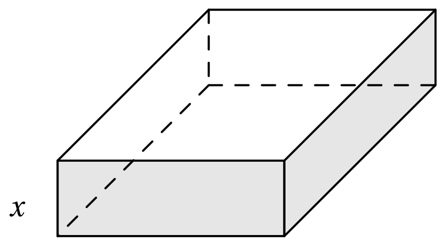


Figure 2

1. Déterminer l'ensemble de définition de V.
2. Exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de x.
3. Etudier les variations de V et déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal.

Correction

On dispose d'une feuille cartonnée de forme carrée dont le côté mesure 12 cm. Dans chaque coin de cette feuille, on découpe un carré de côté x de manière à obtenir, par pliage, une boite parallélépipédique sans couvercle. On appelle $\mathrm{V}(x)$ le volume du parallélépipède obtenu.

1. Déterminer l'ensemble de définition de V.

   x doit être positif car c'est une longueur et puisqu'on enlève deux carrés de côté x dans chaque longueur, on doit avoir $2x \leqslant 12$ soit $x \leqslant 6$.

   L'ensemble de definition de V est donc : $[0;6]$

2. Exprimer $\mathrm{V}(x)$ en fonction de x.

   La boite est un parallélépipède rectangle de côtés x, $12-2x$ et $12-2x$.

   Son volume est donc : $\mathrm{V}(x) = x(12-2x)^2$

3. Etudier les variations de V et déterminer la valeur de x qui rend le volume maximal.

   Avant de calculer la dérivée de V, on peut développer :

$V(x) = x(12-2x)^2 = x(144-48x+4x^2) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

V est dérivable sur $[0;6]$ et, pour tout x de $[0;6]$:

$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x^2 - 8x + 12)$

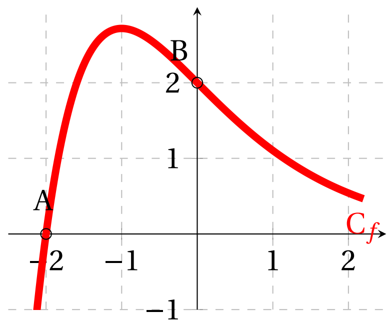
L'étude du signe de V' se ramène donc à l'étude d'un polynôme du second degré dont les racines sont (après calculs...) : 2 et 6.

On obtient donc le tableau ci-dessous :

x	0		2		6
Signe de $V'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de V	0	$\nearrow$	128	$\searrow$	0

Conclusion : le volume maximal est obtenu pour $x = 2$ et ce volume maximal est $V_{max} = 128$

Exercice 5. Une courbe $\mathscr{C}$ qui passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(0\ ;\ 2)$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des réls.



1. A l'aide du graphique, déterminer a et b en justifiant.
2. En déduire le tableau de variation de f.

Correction

1. $f(0) = 2$ donc $b = 2$ et $f(-2) = 0$ donc $a = 1$.
2. $f(x) = (x+2)e^{-x}$ donc $f'(x) = -(x+1)e^{-x}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0