

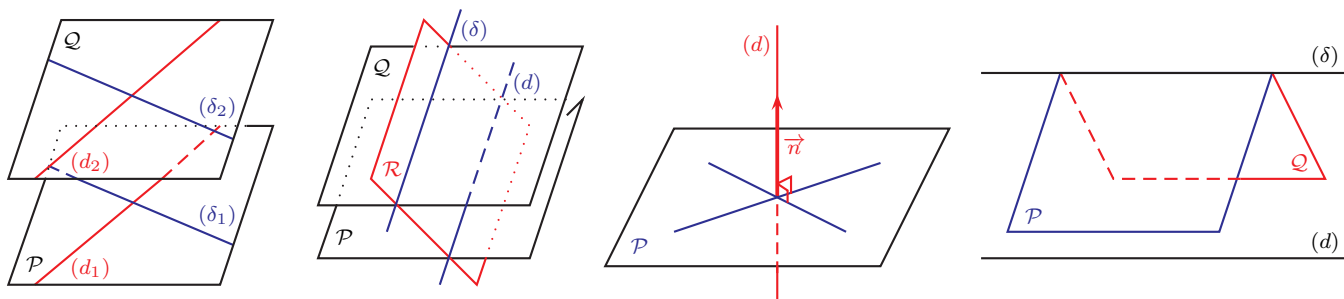
# Géométrie dans l'espace

## Terminale Spé-Math

### Règles d'incidence

- ✦ Si une droite  $(d)$  est parallèle à une droite  $(\delta)$  d'un plan  $\mathcal{P}$ , alors la droite  $(d)$  est parallèle au plan  $\mathcal{P}$
- ✦ Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
- ✦ Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles
- ✦ Si deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{P}$  sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan  $\mathcal{Q}$ , alors les plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont parallèles
- ✦ Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles
- ✦ Une droite  $(d)$  est perpendiculaire à un plan  $\mathcal{P}$  si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan  $\mathcal{P}$ . Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan. Un vecteur  $\vec{n}$  qui dirige  $(d)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{P}$
- ✦ Théorème du toit : si une droite  $(d)$  est parallèle à deux plans sécants  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , alors  $(d)$  est parallèle à la droite  $(\delta)$  d'intersection de  $\mathcal{P}$  et de  $\mathcal{Q}$

### Illustrations des quatre dernières règles



### Vecteurs

- ✦ Relation de Chasles :  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- ✦  $\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} ; \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- ✦  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ✦  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\iff \vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$
- ✦  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  coplanaires  $\iff \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

### Produit scalaire

Écritures :

- ✦  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- ✦  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✦  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- ✦  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$  où  $H$  est le projeté orthogonal du point  $B$  sur la droite  $(OA)$

Propriétés :

- ✦  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- ✦ Deux droites  $(d)$  et  $(\delta)$  de vecteurs normaux  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont orthogonales  $\iff \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
- ✦ Deux plans  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  de vecteurs normaux  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont parallèles ou confondus  $\iff \vec{n} = k\vec{n}'$

### Coplanarité

Des points ou des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

### Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

- ✦  $\vec{AM} = t\vec{u}$  : droite passant par  $A$  de vecteur direct.  $\vec{u}$
- ✦  $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$  : plan passant par  $A$  de vecteurs directeurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires
- ✦  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$  : plan passant par  $A$  de vecteurs normal  $\vec{n}$

Représentations paramétriques :

- ✦ Droite  $(d)$  passant  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$  :
 
$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
- ✦ Plan  $\mathcal{P}$  passant par  $A$  dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :
 
$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, t, t' \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal  $\vec{n}$  :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$