Exponentielle et logarithme

Terminale Spé-Math

Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x$

définie sur $\mathbb{R}$

à valeurs dans $]\,0\,;\,+\infty\,[$

$\mathrm{e}^0 = 1$

$\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2,718$

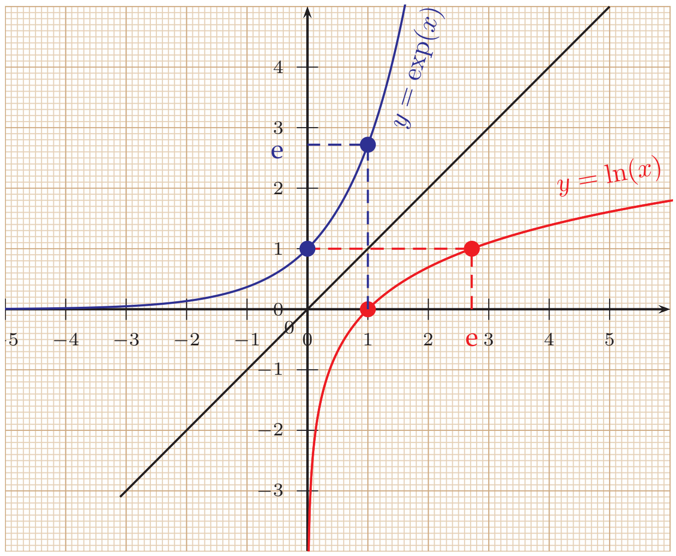
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$

$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$

définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$

à valeurs dans $\mathbb{R}$

$\ln(1) = 0$

$\ln(\mathrm{e}) = 1$

$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

- ✧ Produit : $\mathrm{e}^a \times e^b = \mathrm{e}^{a+b}$
- ✧ Inverse : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{-a}$
- ✧ Quotient : $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
- ✧ Puissance : $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{an}$
- ✧ Racine carrée : $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

- ✧ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- ✧ Inverse : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- ✧ Quotient : $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- ✧ Puissance : $\ln(a^n) = n\ln(a)$
- ✧ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

- ✧ $\ln(\exp x) = x$ $\qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x$
- ✧ $\exp(\ln x) = x$ $\qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
- ✧ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $\qquad \mathrm{e}^x = y \iff x = \ln(y)$
- ✧ $x^y = \exp(y\ln(x))$ $\qquad x^y = \mathrm{e}^{y\ln(x)}$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

- ✧ $\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^v \iff u = v$ $\qquad \mathrm{e}^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u > \mathrm{e}^v \iff u > v$ $\qquad \mathrm{e}^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u \leq \mathrm{e}^v \iff u \leq v$ $\qquad \mathrm{e}^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$
- ✧ $\mathrm{e}^u \leq 0$ impossible et $\mathrm{e}^u > 0$ toujours vrai

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

- ✧ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\qquad \ln(u) = \lambda \iff u = \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\qquad \ln(u) > \lambda \iff u > \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\qquad \ln(u) \leq \lambda \iff u \leq \mathrm{e}^\lambda$
- ✧ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissance comparée et limites particulières

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to0+} x\ln(x) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$