Dérivation et intégration
Terminale Spé-Math

Dérivée et tangente

Nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Tangente au point $A(a, f(a))$: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Primitive

Primitive de f sur I : fonction F continue, dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

primitive	k	x^n	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
dérivée	0	$n\,x^{n-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$

primitive	$u+v$	$u \times v$	ku	u^n	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u}{v}$	e^u	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$
dérivée	$u'+v'$	$u'v+uv'$	ku'	$nu'u^{n-1}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$u'\,\mathrm{e}^u$	$\dfrac{u'}{u}$	$-u'\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Variations d'une fonction

- ✧ f croissante sur $I \iff f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f décroissante sur $I \iff f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Propriétés des primitives

- ✧ Toute fonction continue admet des primitives
- ✧ Primitives de f : fonctions G telles que $G(x) = F(x)+k$
- ✧ Si de plus $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique

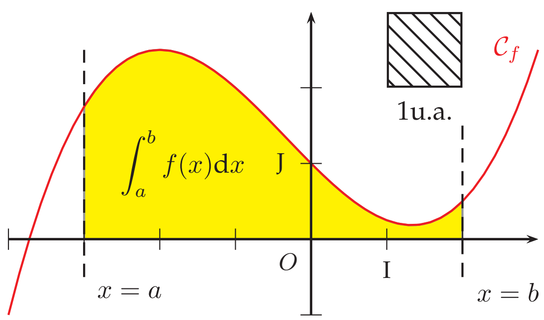
Intégrale

Intégrale de f positive sur $[a,b]$: aire du domaine délimité par la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

On note cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

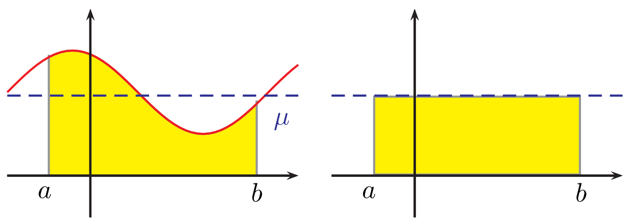
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ

Si f est négative, l'aire vaut $-\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Calcul d'intégrales

- ✧ Soit f continue positive sur $[\,a\,;\,b\,]$, la fonction F définie sur $[\,a\,;\,b\,]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ✧ Valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$: $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Propriétés des intégrales

f et g sont deux fonctions continues sur $[\,a\,;\,b\,]$:

- ✧ $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
- ✧ $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- ✧ Relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$