

Limites et continuité

Terminale Spé-Math

Asymptote horizontale

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$

Asymptote verticale

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

Limites des fonctions usuelles

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$
 carré cube inverse exponentielle logarithme

Opérations sur les limites

| | | | | | | | | |
|--------------------|----|----------|----------|--------|----------|----------|----------|--------------|
| $\lim f$ | 0 | 0 | ∞ | 0 | ℓ | ℓ | ∞ | ∞ |
| $\lim g$ | 0 | ∞ | 0 | ℓ | 0 | ∞ | ℓ | ∞ |
| $\lim(f + g)$ | 0 | ∞ | ∞ | ℓ | ℓ | ∞ | ∞ | ∞ /FI |
| $\lim(f \times g)$ | 0 | FI | FI | 0 | 0 | ∞ | ∞ | ∞ |
| $\lim(f \div g)$ | FI | 0 | ∞ | 0 | ∞ | 0 | ∞ | FI |

$\ell \neq 0$, règle des signes pour les résultats « ∞ »

Théorèmes de comparaison

f, g, h sont trois fonctions. Si, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

- $\diamond f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
- $\diamond f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- \diamond théorème des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$

Limites particulières

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Fonctions composées

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{g \circ f}$

si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = L \end{cases}$
 alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [a; b]$

Si de plus f est strictement monotone, α est unique