Suites numériques

Terminale Spé-Math

Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :

✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$

✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations

✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et $u_n \neq 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante

✧ Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$ ou $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et $u_n \neq 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$

Somme : nbre termes $\times \dfrac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$S_n = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$

Suites géométriques

Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1-q}$

$S_n = 1 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$

Raisonnement par récurrence

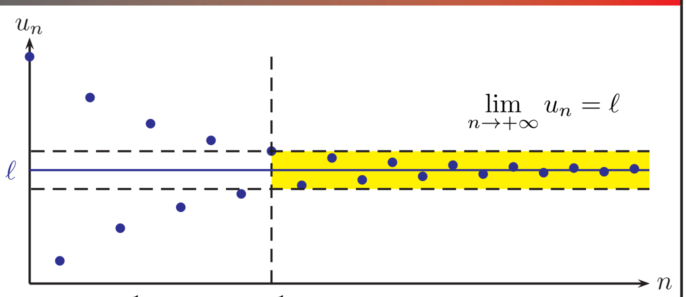
But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0

✧ Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n, alors elle est encore vraie au rang $n+1$

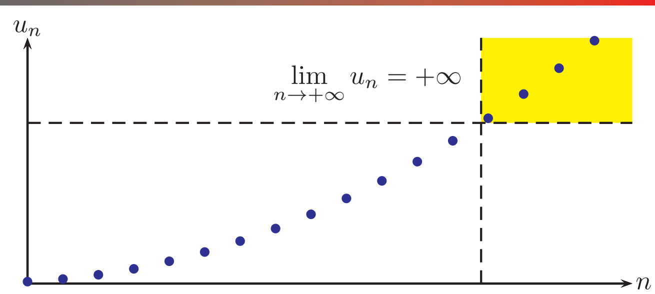
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ n'existe pas

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$

Limites d'une suite géométrique

✧ Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas

✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

✧ Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

✧ Si $q \geq 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

Convergence d'une suite monotone

Une suite (u_n) est majorée [resp. minorée] si, et seulement si, il existe un réel M [resp. m] tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ [resp. $u_n \geq m$]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée

✧ Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge

✧ Une suite croissante de limite ℓ est majorée par ℓ