

# Matrices et suites

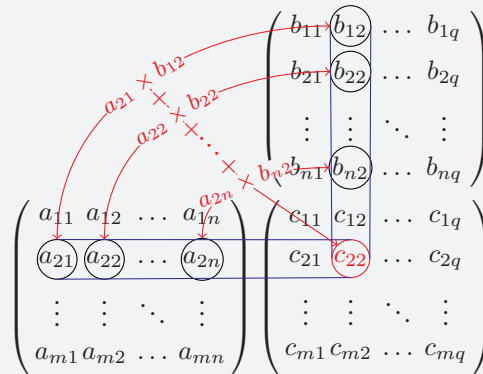
## Terminale - Math Expert

### Vocabulaire des matrices

matrice $m \times n$	matrice ligne	matrice colonne	matrice diagonale	matrice unité
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
$A = (a_{ij})$ : matrice de coefficients $a_{ij}$ (ligne $i$ , colonne $j$ )		$m = n$ : matrice carrée d'ordre $n$		matrice unité : $I_n$ ou $I$

### Opérations avec des matrices

- $A = (a_{ij})$  est une matrice de dimension  $m \times n$   
 $B = (b_{ij})$  est une matrice de dimension  $p \times q$   
 Pour tout  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq j \leq n$  :
- $A = B \iff m = p; n = q$  et  $a_{ij} = b_{ij}$
  - $C = A + B$  avec  $m = p$  et  $n = q$  :  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - $C = kA$  :  $c_{ij} = ka_{ij}$
  - $C = A \times B$  :  $c_{ij} =$  ligne  $i|_A \times$  colonne  $j|_B$
  - $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$  si  $n \neq 0$  et  $A^0 = I$



- $(kA)B = k(AB)$
- $ABC = (AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $AI = IA = A$
- ⚠ en général :  $AB \neq BA$**

### Inverse d'une matrice

- $A$  matrice carrée inversible  $\iff$  il existe  $B$  tel que  $AB = BA = I$   
 Notation :  $B = A^{-1}$
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  inversible  $\iff$   
 $\det(A) = ad - bc \neq 0$   
 $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

p33

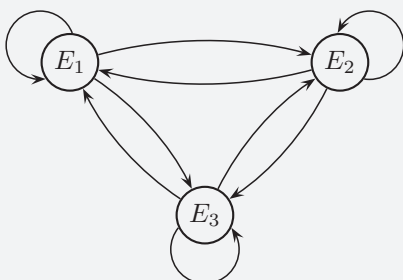
### Résolution d'un système linéaire

- $$p22 \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right. \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B$$
- Écriture :  $AX = B$
  - Condition de solution (unique) :  $A$  inversible
  - Solution :  $X = A^{-1}B$

### Marche aléatoire

Un système qui a  $n$  états possibles  $E_1, E_2, \dots, E_n$  qui évolue de l'un à l'autre par étapes successives aléatoires suit une marche aléatoire à  $n$  états  
 On note  $P_n$  la matrice ligne associée à la marche aléatoire à l'instant  $n$   
 $P_n = (P(X_n = E_1) \ P(X_n = E_2) \ \dots \ P(X_n = E_n))$

graphe probabiliste



matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

- avec :  $0 \leq p_{ij} \leq 1$  et
- $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$
  - $p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1$
  - $p_{31} + p_{32} + p_{33} = 1$

- $P_{n+1} = P_n \times T$  et  $P_n = P_0 \times T^n$
- Un état probabiliste  $P$  est stable  $\iff P \times T = P$

### Suites $U_{n+1} = AU_n$

Une suite de matrices converge  $\iff$  toutes les suites formant les éléments de cette matrice converge  
 $\diamond$  Si  $U_{n+1} = AU_n$  alors  $U_n = A^n U_0$

### Cas particulier de deux états



$$T = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

Si  $(p; q) \neq (0; 0)$  et  $(p; q) \neq (1; 1)$  alors  $P_n$  converge