EPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

MATHEMATIQUES

Jour 2

Jeudi 12 janvier 2023

DUREE DE L'EPREUVE : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Aucun prêt entre les candidats

Le candidat doit traiter les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7

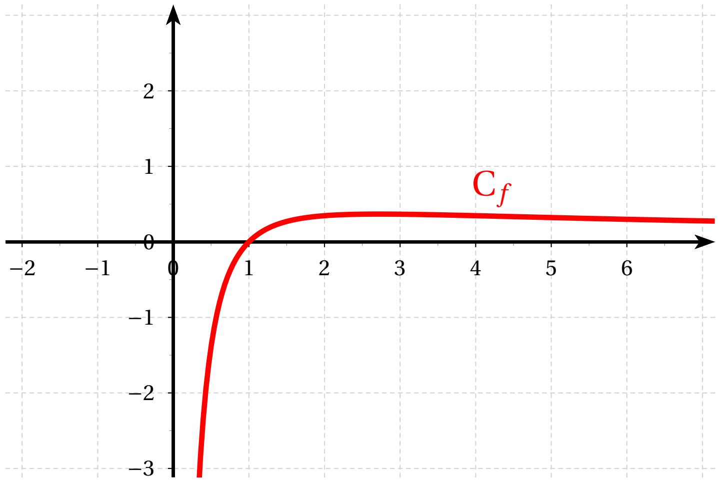
Exercice 1. 6 points

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

On note f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Partie A : Cas particulier

La courbe de f dans un repère othonormé est notée $\mathscr{C}_f$. Elle est représentée ci-dessous.



On note $\mathscr{T}_1$ la tangente de $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Le but de cette partie est d'étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$.

1. (a) Justifier que f est dérivable et montrer que $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

   (b) Justifier que $\mathscr{T}_1$ a pour équation $y = x - 1$.

   (c) Construire $\mathscr{T}_1$ dans le repère donné en annexe.

   (d) Etablir une conjecture sur les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$

2. On note q la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $q(x) = -\ln(x) - x^2 + 1$.

   (a) Calculer $q(1)$.

   (b) Montrer que q est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

   (c) En déduire le tableau de signe de q sur $]0;+\infty[$.

3. On note p la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $p(x) = f(x) - (x-1)$.

   (a) Montrer que p est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $p'(x) = \dfrac{q(x)}{x^2}$.

   (b) En déduire que p atteint son maximum en 1.

   (c) Déterminer le signe de p sur $]0;+\infty[$.

4. Déterminer les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{T}_1$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B : Etudes des positions relatives

1. Déterminer la dérivée seconde f'' de la fonction f.
2. En déduire la convexité de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
3. Généraliser les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de ses tangentes.

Partie C : Primitives

1. Démontrer que la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$ est une primitive de f.
2. Résoudre l'équation $g(x) = 1$.
3. Soit $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 1$.

   Déterminer la primitive F de f vérifiant $\mathrm{F}(\alpha) = 0$.

Exercice 2. 4 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

L'enquête révèle que 70 % des élèves sont sensibles au développement durable, et, parmi ceux qui sont sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif.

Parmi ceux qui ne sont pas sensibles au développement durable, on en trouve 10 % qui pratiquent le tri sélectif.

On interroge un élève au hasard dans le lycée. On considère les évènements suivants :

- S : L'élève interrogé est sensible au développement durable.
- T : L'élève interrogé pratique le tri sélectif.

Les résultats seront arrondis à 10^{-2}.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'élève interrogé soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Montrer que la probabilité $\mathrm{P(T)}$ de l'évènement T est $0,59$.
4. On interroge un élève qui ne pratique pas le tri sélectif.

   Peut-on affirmer que les chances qu'il se dise sensible au développement durable sont inférieures à 10 % ?
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement.

   Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif parmi les 4 élèves interrogés. Le nombre d'élèves de l'établissement est suffisamment grand pour que l'on considère que X suit une loi binomiale.

   (a) Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   (b) Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves interrogés ne pratique le tri sélectif.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves interrogés pratiquent le tri sélectif.

   (d) La probabilité qu'un élève pratiquant le tri selectif n'est plus de $0,59$, quelle devrait être la plus petite probabilité, au centième près, pour que $p(\mathrm{X} \geq 2) \geq 0,99$ toujours avec un échantillon de 4 ?

Exercice 3. 5 points

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. (a) Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.

   On précisera en particulier ce que représente u_n.

   (b) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   (c) On peut également utiliser le programme en Python suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.

   Compléter cet algorithme sur l'annexe.

```
def seuil() :
    u= ..........
    n=..........
    while ............................ :
        ............................
        ............................
    return (u , n)
```

2. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   (b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg.
Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = \dfrac{50}{1+49\,\mathrm{e}^{-0,2t}}$ où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

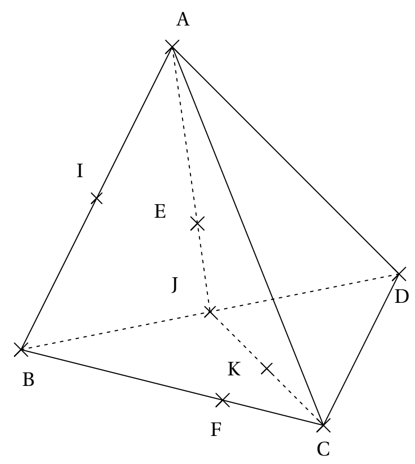
1. (a) Calculer $f(0)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f, on pourra utiliser les composées de fonctions.

2. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

   Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$. En déduire la réponse au problème.

Exercice 4. 5 points



Soient ABCD est un tétraèdre et I, J, K sont les milieux respectifs de [AB], [BD] et [JC].
ainsi que les points E et F sont définis par $\overrightarrow{AE} = \dfrac{2}{3}\ \overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

<u>Méthode 1 :</u>

1. (a) Exprimer $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{IE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

   (b) Montrer que I, E et D sont alignés.

   On admettra que les points F, K et D sont alignés.

2. (a) Que peut-on dire des droites (IE) et (FK) ?

   (b) En déduire que I, E, F et K sont coplanaires.

<u>Méthode 2 : dans un repère de l'espace</u>

1. Pourquoi $(B;\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BA})$ est-il un repère de l'espace ?
2. Déterminer sans justification les coordonnées de B, C, D, A dans ce repère $(B;\ \overrightarrow{BC};\ \overrightarrow{BD};\ \overrightarrow{BA})$.
3. Déterminer, en effectuent des calculs, les coordonnées I et F dans ce repère.
4. Vérifier que les points J, K et E ont bien les coordonées suivantes : $J\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$; $K\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};0\right)$ et $E\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
5. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{IK}\ =\ a\ \overrightarrow{IF}\ +\ b\ \overrightarrow{IE}$
6. Que peut-on en déduire pour les points I, E, K, F ?

Annexe – Examen blanc J2 – Jeudi 12 janvier 2023

Calculatrice est autorisée

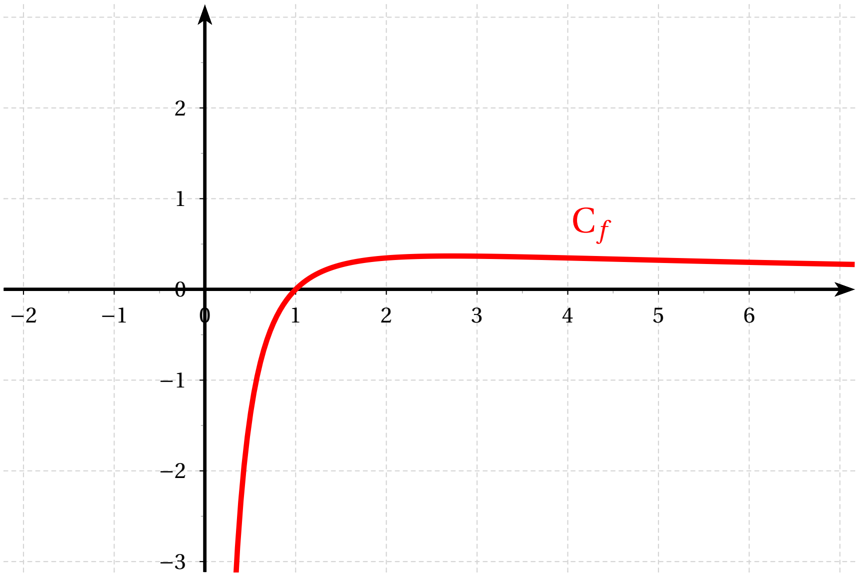
Nom : .... Prénom : ....

TOTAL sur 20	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Exercice 4
	/ 6	/4	/5	/ 5

Exercice 1 - Partie A, question 1c)

La courbe de f dans un repère othonormé est notée $\mathscr{C}_f$.

Construire $\mathscr{T}_1$ dans le repère ci-dessous.



Exercice 3 - Partie A, question 1c)

Compléter cet algorithme sur l'annexe.

```
def seuil() :
    u= ..........
    n=..........
    while ........................... :
        ....................................
        ....................................
    return (u , n)
```