BAC BLANC - NOVEMBRE

Partie 1 - Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et I_3 matrice identité de taille 3.

1. Déterminer par le calcul la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1{,}25 \\ p & 2 & -2{,}5 \\ q & -1{,}5 & 1{,}25 \end{pmatrix}$ telle que $M \times N = I_3$.

2. En déduire la matrice inverse de M.

3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

Partie 2 - Application

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :

- un camion : 3 h de travail et 2 kg de bois.
- un pantin : 2 h de travail et 800 g de bois.
- un puzzle : 1 h de travail et 400 g de bois.

L'entreprise produit 84 jouets au total en utilisant exactement 128 h de travail et 60 kg de bois.

On pose le nombre x de camions, le nombre y de pantins et le nombre z de puzzles fabriqués par l'entreprise.

1. Vérifier que la mise en équation du problème suivant peut s'écrire sur la forme d'un système

$$(S): \begin{cases} x + y + z = 84 \\ 3x + 2y + z = 128 \\ 2x + 0{,}8y + 0{,}4z = 60 \end{cases}$$

2. Déterminer les matrices A et B tel que le système se traduit par l'équation matricielle $AX = B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. Résoudre l'équation matricielle et déterminer la triplette solution du système.

4. Interpréter les résultats obtenus.

Bac blanc - Novembre

<u>Partie 1</u> Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit la matrice $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0,8} & \mathbf{0,4} \end{pmatrix}$ **et** $\boldsymbol{I_3}$ **matrice identité de taille 3.**

1. Déterminer par le calcul la matrice $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{1,25} \\ \boldsymbol{p} & \mathbf{2} & \mathbf{-2,5} \\ \boldsymbol{q} & \mathbf{-1,5} & \mathbf{1,25} \end{pmatrix}$ **telle que** $\boldsymbol{M \times N = I_3}$**.**

On cherche la matrice N tel que $M \times N = I_3$

$$M \times N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0,8 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1,25 \\ p & 2 & -2,5 \\ q & -1,5 & 1,25 \end{pmatrix}$$

$$M \times N = \begin{pmatrix} p+q & -0,5+2-1,5 & 1,25-2,5+1,25 \\ 2p+q & -3 \times 0,5 + 2 \times 2 - 1,5 & 3 \times 1,25 - 2 \times 2,5 + 1,25 \\ 0,8p+0,4q & -2 \times 0,5 + 0,8 \times 2 - 0,4 \times 1,5 & 2 \times 1,25 - 0,8 \times 2,5 + 4 \times 1,25 \end{pmatrix}$$

$$M \times N = \begin{pmatrix} p+q & 0 & 0 \\ 2p+q & -1,5+4-1,5 & 3,75-5+1,25 \\ 0,8p+0,4q & -1+1,6-0,6 & 2,5-2+0,5 \end{pmatrix}$$

$$M \times N = \begin{pmatrix} p+q & 0 & 0 \\ 2p+q & 1 & 0 \\ 0,8p+0,4q & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Alors on obtient le système

$$\begin{cases} p+q=1 & L_1 \\ 2p+q=0 & L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p+q=1 & L_1 \\ q=2 & 2L_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=1-2 \\ q=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=-1 \\ q=2 \end{cases}$$

Donc $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-0.5} & \mathbf{1,25} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2,5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1,5} & \mathbf{1,25} \end{pmatrix}$

2. En déduire la matrice inverse de $\boldsymbol{M}$**.**

On sait que $M \times N = I_3$

<u>Donc</u> **$\boldsymbol{N}$ est la matrice inverse de $\boldsymbol{M}$**

3. Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

On constate à la calculatrice, que $M \times N = I_3$

Partie 2 Application

Une entreprise fabrique des jouets en bois qui nécessitent pour :

- **un camion : 3 h de travail et 2 kg de bois.**
- **un pantin : 2 h de travail et 800 g de bois.**
- **un puzzle : 1 h de travail et 400 g de bois.**

L'entreprise produit 84 jouets au total en utilisant exactement 128 h de travail et 60 kg de bois.

On pose le nombre x de camions, le nombre y de pantins et le nombre z de puzzles fabriqués par l'entreprise.

1. Vérifier que la mise en équation du problème suivant peut s'écrire sur la forme d'un système

$$(\boldsymbol{S}) : \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=84} \\ \boldsymbol{3x+2y+z=128} \\ \boldsymbol{2x+0,8y+0,4z=60} \end{cases}$$

On sait que x représente le nombre de camions, y celui des pantins et z celui des puzzles.

Il y a : ● 84 jouets avec des camions, pantins et puzzles

d'où $x+y+z=84$

● 128 h de travail avec 3h pour les camions, 2h les pantins et 1h par puzzles

d'où $3x+2y+z=128$

● 60 kg de bois avec 2 kg pour les camions, 800 g = 0,8 kg les pantins et 400 g= 0,4 kg par puzzles

d'où $2x+0{,}8y+0{,}4z=60$

2. Déterminer les matrices A et B tel que le système se traduit par l'équation matricielle $AX = B$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On veut avoir $AX=B$ avec $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On pose alors $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0{,}8 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 84 \\ 128 \\ 60 \end{pmatrix}$

3. Résoudre l'équation matricielle et déterminer la triplette solution du système.

On a $AX=B$

On remarque que la matrice A correspond à celle de M de la partie 1

Donc la matrice A est inversible tel que $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -0.5 & 1{,}25 \\ -1 & 2 & -2{,}5 \\ 2 & -1{,}5 & 1{,}25 \end{pmatrix}$

On peut alors résoudre l'équation matricielle $A\,X=B$

$A^{-1}\times AX=A^{-1}\times B$

$X=A^{-1}\times B$

A l'aide de la calculatrice, on détermine X telque $X=A^{-1}\times B$

On trouve $X=\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 51 \end{pmatrix}$

4. Interpréter les résultats obtenus.

Comme on a trouvé $X=\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 51 \end{pmatrix}$,

Cela signifie que l'entreprise a fabriqué : 11 camions, 22 pantins et 51 puzzles.