DS 1 – LE 19 OCTOBRE 2017

Exercice 1

1) On donne les trois matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Déterminer les réels x et y pour que $A + B = S$.

2) Bianca a écrit le résultat suivant sur sa copie.
A-t-elle indiqué le bon résultat ? Justifie.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}$$

3) On donne : $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Pourquoi ne peut-on pas calculer $E \times F$?

b) Calculer, en posant les calculs, $F \times E$.

Exercice 2

Pour la fabrication de deux articles $Alpha$ et $Bêta$, on distingue trois facteurs techniques de production : matières premières, travail et énergie.
Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'un article A et à celle d'un article B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces trois facteurs de production *(matières premières, travail et énergie)*.

Facteurs techniques	Article $Alpha$	Article $Bêta$	Coût d'une unité du facteur (en euros)
Nombre d'unités de matières premières	5	6	8
Nombre d'unités de travail	4	3	5
Nombre d'unités d'énergie	2	3	4

On note :

- $Q = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ la matrice dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux articles $Alpha$ et $Bêta$.
- $C = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ la matrice colonne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (matières premières, travail et énergie).

1) Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice P des coûts de production de chaque article.

2) La marge bénéficiaire sur chaque article est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 25 % pour l'article $Alpha$ et à 20 % pour l'article $Bêta$. B.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 1{,}20 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la marge bénéficiaire.
A l'aide d'un produit de matrices, déterminer la matrice V des prix de vente de chaque article.

3) L'entreprise reçoit une commande de 10 articles $Alpha$ et 15 articles $Bêta$.
Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

CORRECTION DS 1 – LE 19 OCTOBRE 2017

Exercice 1

1) On donne les trois matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} y & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ **et** $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
Déterminer les réels x et y pour que $A + B = S$.

$$A + B = S \iff \begin{pmatrix} x & 3 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -2 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x+y & 1 \\ 1 & 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = -1 \\ 1 = 1 \\ 1 = 1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = -1 & (L_1) \\ 2x + y = 7 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2y = -2 & (2L_1) \\ 2x + y = 7 & (L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = -1 & (L_1) \\ \quad +y = -9 & (2L_1 - L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x - 9 = -1 \\ \quad y = -9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -1 + 9 \\ y = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 8 \\ y = -9 \end{cases}$$

Vérification
$x + y = 8 - 9 = -1$
$2x + y = 2 \times 8 - 9 = 16 - 9 = 7$

Donc on trouve $x = 8$ et $y = -9$ d'où $S = \{(8; -9)\}$

2) Bianca a écrit le résultat suivant sur sa copie.
A-t-elle indiqué le bon résultat ? Justifie. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -16 & 25 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 3 \times 4 & -2 \times 3 - 3 \times 5 \\ -4 \times 2 - 5 \times 4 & 4 \times 3 + 5 \times 5 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 + 12 & -6 - 15 \\ -8 - 20 & 12 + 25 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & -21 \\ -28 & 37 \end{pmatrix}$$

Donc Bianca n'avait pas trouvé le bon résultat.

3) On donne : $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **et** $F = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

a) Pourquoi ne peut-on pas calculer $E \times F$?
On ne peut pas calculer $E \times F$ car il y a plus de coefficients sur les lignes de E que sur les colonnes de F.

b) Calculer, en posant les calculs, $F \times E$.

$$F \times E = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 1 + 8 \times 4 & 7 \times 2 + 8 \times 5 & 7 \times 3 + 8 \times 6 \\ 9 \times 1 + 10 \times 4 & 9 \times 2 + 10 \times 5 & 9 \times 3 + 10 \times 6 \end{pmatrix}$$

$$F \times E = \begin{pmatrix} 7 + 32 & 14 + 40 & 21 + 48 \\ 9 + 40 & 18 + 50 & 27 + 60 \end{pmatrix} \qquad F \times E = \begin{pmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 49 & 68 & 87 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Pour la fabrication de deux articles $Alpha$ et $B\hat{e}ta$, on distingue trois facteurs techniques de production : matières premières, travail et énergie.
Le tableau suivant indique les quantités d'unités de ces facteurs nécessaires à la production d'un article A et à celle d'un article B ainsi que la valeur estimée du coût de revient d'une unité de chacun de ces trois facteurs de production *(matières premières, travail et énergie)*.

Facteurs techniques	**Article $Alpha$**	**Article $B\hat{e}ta$**	**Coût d'une unité du facteur (en euros)**
Nombre d'unités de matières premières	5	6	8
Nombre d'unités de travail	4	3	5
Nombre d'unités d'énergie	2	3	4

On note :

- $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ **la matrice dont les éléments sont les quantités de facteurs de production nécessaires à la fabrication des deux articles $Alpha$ et $B\hat{e}ta$.**
- $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ **la matrice colonne des coûts unitaires, en euros, des trois facteurs de production (matières premières, travail et énergie).**

1) Calculer sous forme d'un produit de matrices, la matrice P des coûts de production de chaque article.

$$P = Q \times C \quad \Leftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 40+20+8 \\ 48+15+12 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 68 \\ 75 \end{pmatrix}$$

La matrice des coûts de production de chaque article est $P = \begin{pmatrix} 68 \\ 75 \end{pmatrix}$.

2) La marge bénéficiaire sur chaque article est un pourcentage du coût total de production. Elle est égale à 25 % pour l'article $Alpha$ et à 20 % pour l'article $B\hat{e}ta$. B.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1,25 & 0 \\ 0 & 1,20 \end{pmatrix}$ la matrice associée à la marge bénéficiaire.
A l'aide d'un produit de matrices, déterminer la matrice V des prix de vente de chaque article.

$$V = M \times P \quad \Leftrightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0 \\ 0 & 1{,}20 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 68 \\ 75 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 1{,}25 \times 68 + 0 \times 75 \\ 0 \times 68 + 1{,}20 \times 75 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 1{,}25 \times 68 \\ 1{,}20 \times 75 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad V = \begin{pmatrix} 85 \\ 90 \end{pmatrix}$$

La matrice des prix de vente de chaque article est $V = \begin{pmatrix} 85 \\ 90 \end{pmatrix}$.

3) L'entreprise reçoit une commande de 10 articles $Alpha$ et 15 articles $B\hat{e}ta$.
Calculer à l'aide d'un produit de deux matrices, le montant total en euros de la commande.

Soit $N = (10 \quad 15)$ la matrice correspondant à la commande de de 10 articles $\boldsymbol{Alpha}$ et 15 articles $\boldsymbol{B\hat{e}ta}$.

$$T = N \times V \quad \Leftrightarrow \quad T = (10 \quad 15) \times \begin{pmatrix} 85 \\ 90 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad T = (10 \times 85 + 15 \times 90)$$

$$\Leftrightarrow \quad T = (2\,200)$$

Le montant total de la commande est de 2200 euros.