Durée : 3h **Calculatrice autorisée**

Exercice 1 **- 5 points -**

Tous les jours, Tom joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.

1. Rob se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20; 120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120; 400)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.

b. Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \quad \Leftrightarrow \quad -1,5 < \frac{J-120}{20} < 3$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J-120}{20}$. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

Exercice 2 **- 5 points -**

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats décimaux seront arrondis au millième pour tout l'exercice.

Partie A

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

- 80 % de CDI (contrat à durée indéterminée)
- 20 % de CDD (contrat à durée déterminée).

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Calculer le pourcentage de CDI sur chaque site de production.

2. Pour une proportion $p = 0,8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % relatifs aux échantillons de taille n, pour $n = 421$ et pour $n = 68$.

3. Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

Partie B

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

2. S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

3. Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

Exercice 3 **- 5,5 points -**

On s'intéresse à une espèce de saumons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

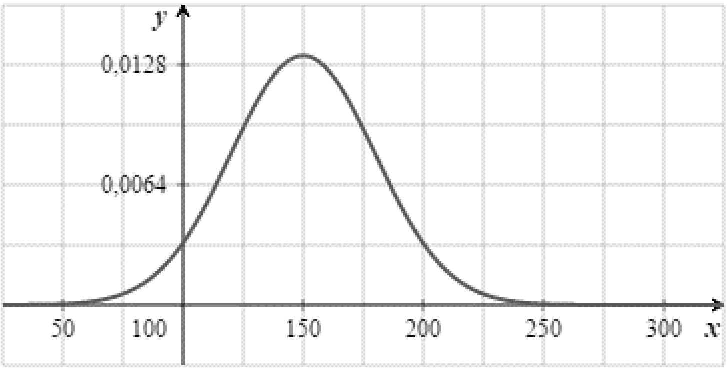
A. Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque saumon observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces saumons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ

et d'écart type $\sigma = 30$.

La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ.

2. On pêche un de ces saumons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un saumon dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.

3. Un saumon de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.

On pêche un saumon de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un saumon adulte.

4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ.
Est-il vrai que $P(X < k) < 0{,}5$? Justifier.

B. Étude de la zone 2

1. Certains saumons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 saumons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 saumons sont malades.

a. Calculer la fréquence f de saumons malades dans l'échantillon.

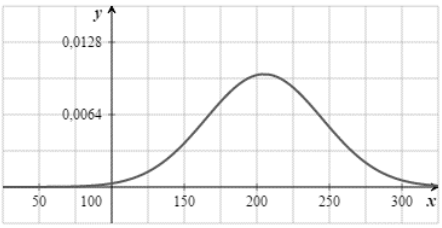
b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de saumons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

Rappel : intervalle de confiance $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ *avec les conditions :* $n \geq 30$ *;* $nf \geq 5$ *et* $np(1-f) > 5$

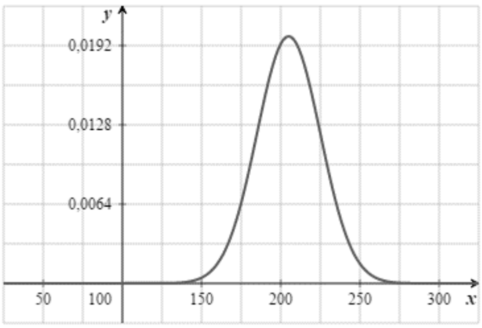
2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque saumon de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.

En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.

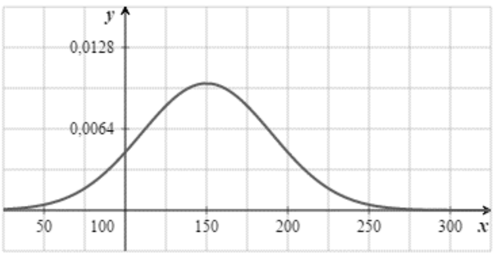
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Exercice 4 - 6,5 points -

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

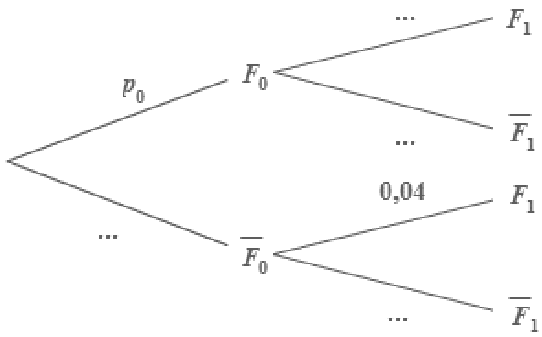
- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_O}$ son évènement contraire ;

F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1er mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



b. Montrer que $p_1 = 0{,}9\, p_0 + 0{,}04$.

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0{,}55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.

On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9 \times p_n + 0{,}04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N P prend la valeur 0,9P+0,04 Fin pour
Sortie :	Afficher P

a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur N=1.

b. Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0{,}4$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 \leqslant 0{,}45$.

b. Interpréter le résultat trouvé.

Exercice 5 **- 8 points -**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10; 30]$ par $f(x) = 5 + x\, e^{0,2x-1}$.

On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 30]$, $f'(x) = (0,2x + 1)\, e^{0,2x-1}$.

2. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10; 30]$.

3. Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,; 20]$ et donner un encadrement de α à $0{,}1$ près.

4. Soit F la fonction définie sur $[-10; 30]$ par $F(x) = 5(x - 5)e^{0,2x-1} + 5x$.

   On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10\,;\, 30]$.

   a. Calculer la valeur exacte de $I = \int_5^{10} f(x)dx$.

   b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5; 10]$. (On donnera une valeur arrondie au centième.)

Partie B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial. Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0; 20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.

2. En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.

3. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2500 euros. Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

T ES/L	DEVOIR SURVEILLE 6	22 MAI 2015

Durée : 3h **Calculatrice autorisée**

NOM : **Prénom :**

« Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. »
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

<u>Exercice 1</u> - 5 points - Centre étrangers 2013

Tous les jours, Tom joue à un jeu en ligne sur un site, avec trois amis.
1. Rob se connecte sur le site. La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20;120]$.

a. Déterminer la probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes.

La durée D (en seconde) qu'il faut pour réunir les quatre joueurs est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20;120]$ d'où

$$P(20 \leqslant D \leqslant 60) = \frac{60-20}{120-20} = 0{,}4$$

La probabilité que les quatre joueurs soient réunis au bout de 60 secondes est égale à 0,4.

b. Calculer l'espérance mathématique de D. Interpréter ce résultat.

L'espérance mathématique de D qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[20;120]$ est :

$$E = \frac{20+120}{2} = 70$$

L'espérance mathématique de D est égale à 70.
Les quatre joueurs sont réunis en moyenne au bout de 70 secondes.

2. L'équipe est maintenant réunie et la partie peut commencer. La durée J (en minute) d'une partie est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(120;400)$.

a. Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire J.

La variable aléatoire J suit la loi normale $\mathcal{N}(120;400)$ signifie que J suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 400 = \sqrt{400} = 20$.

b. Montrer l'équivalence : $90 < J < 180 \quad \Leftrightarrow \quad -1{,}5 < \frac{J-120}{20} < 3$

$$\begin{aligned} 90 < J < 180 &\Leftrightarrow 90-120 < J-120 < 180-120 \\ &\Leftrightarrow -\frac{30}{20} < \frac{J-120}{20} < \frac{60}{20} \\ &\Leftrightarrow -1{,}5 < \frac{J-120}{20} < 3 \end{aligned}$$

c. On définit la variable aléatoire X par $X = \frac{J-120}{20}$. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X.

La variable aléatoire J suit la loi normale d'espérance $\mu = 120$ et d'écart-type $\sigma = 20$
Donc la variable aléatoire X définie par $X = \frac{J-120}{20}$ suit la loi normale centrée réduite.

d. Déterminer la probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes, à 0,001 près.

Avec la calculatrice on trouve :
$P(-1{,}5 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0{,}932$ ou $P(90 \leqslant J \leqslant 180) \approx 0{,}932$
La probabilité que la partie dure entre 90 et 180 minutes est égale à 0,932.

<u>Exercice 2</u> - 5 points - **Antilles, Guyane 2013**

Les parties A et B sont indépendantes.
Les résultats décimaux seront arrondis au millième pour tout l'exercice.

<u>Partie A</u>

La direction d'une société fabriquant des composants électroniques impose à ses deux sites de production de respecter les proportions ci-dessous en termes de contrat d'embauche du personnel :

- **80 % de CDI (contrat à durée indéterminée)**
- **20 % de CDD (contrat à durée déterminée).**

On donne la composition du personnel des deux sites dans le tableau suivant :

	CDI	CDD	Effectif total
Site de production A	315	106	421
Site de production B	52	16	68

1. Calculer le pourcentage de CDI sur chaque site de production.

$\frac{315}{421} \approx 0{,}748$ et $\frac{52}{68} \approx 0{,}765$

74,8 % des contrats d'embauche sur le site A sont en CDI et sur le site B 76,5 % des contrats d'embauche sont en CDI.

2. Pour une proportion $p = 0,8$, déterminer les intervalles de fluctuation asymptotiques au seuil de 95 % relatifs aux échantillons de taille n, pour $n = 421$ et pour $n = 68$.

SITE A

$n = 421$, $np = 421 \times 0{,}8 = 336{,}8$ et $n(1-p) = 461 \times 0{,}2 = 84{,}2$.

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est :

$$I = \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{421}} ;\ 0{,}8 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{421}}\right] \approx [0{,}762; 0{,}838]$$

Soit en arrondissant à 10^{-3} près les bornes de l'intervalle, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % relatifs à un échantillon de taille $n = 421$ est $[0{,}762; 0{,}838]$.

SITE B

$n = 68$, $np = 68 \times 0{,}8 = 54{,}4$ et $n(1-p) = 68 \times 0{,}2 = 13{,}6$

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est :

$$I = \left[0{,}8 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{68}} ;\ 0{,}8 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}8 \times 0{,}2}}{\sqrt{68}}\right] \approx [0{,}705; 0{,}895]$$

Soit en arrondissant à 10^{-3} près les bornes de l'intervalle, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % relatifs à un échantillon de taille $n = 68$ est $[0{,}705; 0{,}895]$

3. Comment la direction de la société peut-elle interpréter les intervalles obtenus dans la question précédente ?

Cette question est ambiguë dans la mesure où la direction impose aux deux sites de production la proportion de 80 % de contrats d'embauche en CDI et que les données concernent les effectifs des deux sites de l'entreprise et non pas un échantillon de la population des deux sites. Par conséquent, l'objectif de 80 % de contrats d'embauche en CDI n'est pas atteint.

Je suppose qu'une réponse acceptée serait :

$0{,}748 \notin [0{,}762; 0{,}838]$, au risque d'erreur de 5 % le site A ne respecte pas la proportion de 80 % de contrats d'embauche en CDI.

$0{,}765 \in [0{,}705; 0{,}895]$, l'hypothèse de 80 % de contrats d'embauche en CDI est respectée dans le site B.

Partie B

Dans cette partie, on convient que l'on peut utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique lorsque $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$, où p désigne la proportion dans une population, et n désigne la taille d'un échantillon de cette population.

La direction de cette même société tolère 7 % de composants défectueux. Le responsable d'un site de production souhaite évaluer si sa chaîne de production respecte cette contrainte de 7 %. Pour cela, il prélève un échantillon de composants électroniques.

1. S'il prélève un échantillon de 50 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

$np = 50 \times 0{,}07 = 3{,}5$.

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique ne sont pas réunies.

2. S'il prélève un échantillon de 100 composants, peut-il utiliser l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % ? Expliquer.

$n = 100$, $np = 100 \times 0{,}07 = 7$ et $n(1-p) = 100 \times 0{,}93 = 93$.

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies.

3. Le responsable du site de production prélève un échantillon de taille 100, dans lequel 9 composants électroniques s'avèrent défectueux. Comment peut-il interpréter ce résultat ?

Les conditions d'utilisation d'un intervalle de fluctuation asymptotique sont réunies. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 0,95 est :

$$I = \left[0{,}07 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}07 \times 0{,}93}}{\sqrt{100}} ;\ 0{,}07 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}07 \times 0{,}93}}{\sqrt{100}}\right] \approx [0{,}02; 0{,}12]$$

Soit en arrondissant à 10^{-3} près les bornes de l'intervalle, l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % relatifs à un échantillon de taille $n = 100$ est $I = [0{,}02; 0{,}12]$.

La fréquence de composants défectueux dans l'échantillon est 0,09 et, $0{,}09 \in [0{,}02; 0{,}12]$, donc l'hypothèse de 7 % de composants défectueux tolérés est validée.

Exercice 3 **- 5,5 points -** **Polynésie 2013**

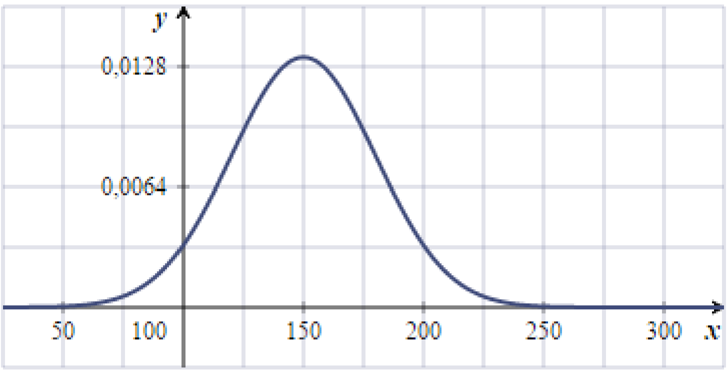
On s'intéresse à une espèce de saumons présente dans deux zones différentes (zone 1 et zone 2) de la planète.

A . Étude de la zone 1

On note X la variable aléatoire qui à chaque saumon observé dans la zone 1 associe sa taille en cm.

Une étude statistique sur ces saumons de la zone 1 a montré que la variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type $\sigma = 30$.

La courbe de la densité de probabilité associée à X est représentée ci-contre.



1. Par lecture graphique, donner la valeur de μ

Le maximum de la fonction de densité, est atteint pour $\mu = 150$

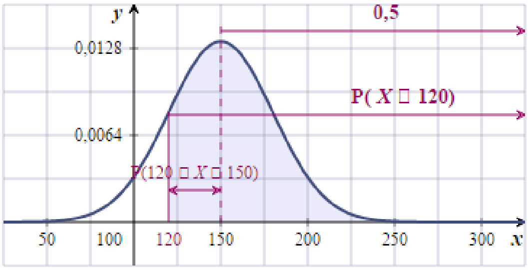
2. On pêche un de ces saumons dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, d'avoir un saumon dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm.

Avec la calculatrice, on trouve $P(150 \leqslant X \leqslant 210) \approx 0{,}477$

La probabilité arrondie à 10^{-2}, d'avoir un saumon dont la taille est comprise entre 150 cm et 210 cm est égale 0,48.

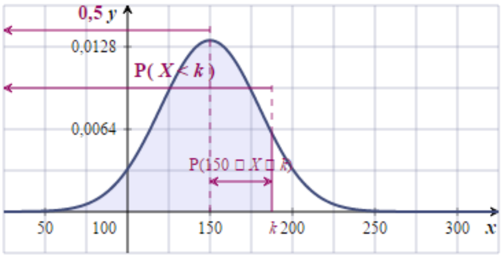
3. Un saumon de cette espèce de la zone 1 est considéré comme adulte quand il mesure plus de 120 cm.
On pêche un saumon de l'espèce considérée dans la zone 1. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-2}, de pêcher un saumon adulte.

La calculatrice permet de déterminer la probabilité $P(a \leqslant X \leqslant b)$ quand X suit la loi normale de moyenne 150 et d'écart type 30 :
$P(x > 120) = P(120 \leqslant X \leqslant 150) + P(x \geqslant 150)$
$\qquad = 0{,}5 + P(120 \leqslant X \leqslant 150) \approx 0{,}841$
La probabilité arrondie à 10^{-2}, de pêcher un saumon adulte est égale à 0,84.



4. On considère un nombre k strictement plus grand que la valeur moyenne μ. Est-il vrai que $P(X < k) < 0,5$? Justifier.

Si $k > \mu$ alors
$P(X < k) = P(x \leqslant \mu) + P(\mu \leqslant X \leqslant k)$
$\qquad = 0{,}5 + P(\mu \leqslant X \leqslant k)$
Si k est un nombre réel strictement plus grand que la valeur moyenne μ
alors $P(X < k) > 0{,}5$



B . Étude de la zone 2

1. Certains saumons de la zone 2 sont atteints d'une maladie. On prélève de façon aléatoire un échantillon de 50 saumons de cette espèce dans la zone 2 et on constate que 15 saumons sont malades.

a. Calculer la fréquence f de saumons malades dans l'échantillon.

On a $f = \frac{15}{50} = 0{,}3$
La fréquence observée est de 0,3

b. Déterminer un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de saumons malades dans toute la zone 2. On arrondira les bornes au millième.

Rappel :** intervalle de confiance* $\left[\boldsymbol{f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}}\right]$ ***avec les conditions : $\boldsymbol{n \geq 30}$ ***;*** $\boldsymbol{nf \geq 5}$ ***et*** $\boldsymbol{np(1-f) > 5}$
La fréquence observée est $f = 0{,}3$ pour un échantillon de taille 50.
Nous avons $n = 50,\ nf = 15 > 5$ et $n(1-f) = 35 > 5$.
Les conditions d'approximation sont vérifiées d'où l'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 est

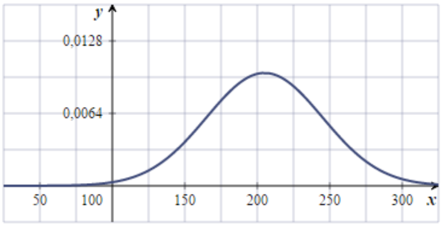
$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}3 - \frac{1}{\sqrt{50}} ; 0{,}3 + \frac{1}{\sqrt{50}}\right] \approx [0{,}159 ; 0{,}441]$$

Un intervalle de confiance, au niveau de 95%, de la proportion p de saumons malades dans toute la zone 2 est $I = [0{,}159 ; 0{,}441]$

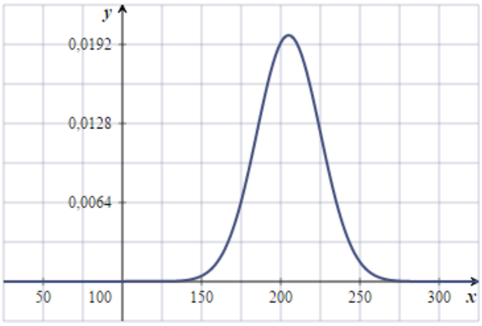
2. Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque saumon de l'espèce considérée de la zone 2, associe sa taille en cm. On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $\mu' = 205$ et d'écart type $\sigma' = 40$.
En comparant avec le graphique de la zone 1 donné à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$, dire laquelle des trois courbes ci-dessous représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y. Justifier la réponse.

Le maximum de la fonction de densité, est atteint pour $\mu = 205$ donc la courbe 3 ne convient pas.
L'écart type $\sigma' = 40$ par conséquent, la dispersion autour de la moyenne est plus grande que celle de la courbe donnée à la question 1 qui représente une loi normale d'écart type $\sigma = 30$. Donc la courbe 2 ne convient pas.
La courbe 1 représente la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.

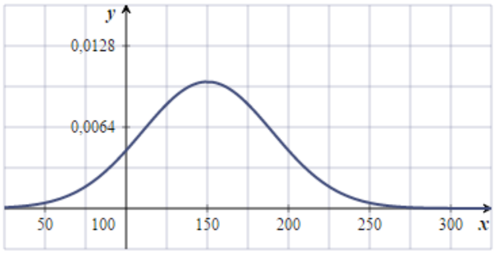
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



<u>Exercice 4</u> - 6,5 points -

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- **6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;**
- **4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.**

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :
F_0 l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son évènement contraire ;
F_1 l'évènement « la personne interrogée le 1er mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son évènement contraire.

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.

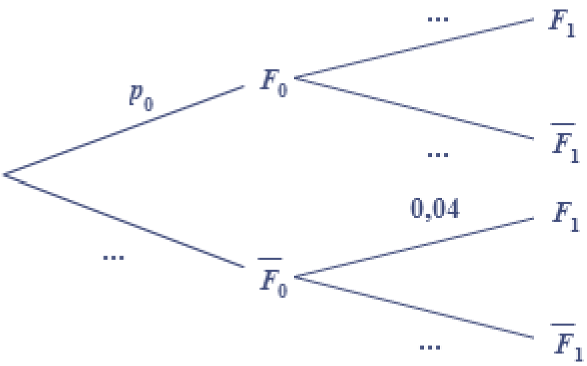
Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

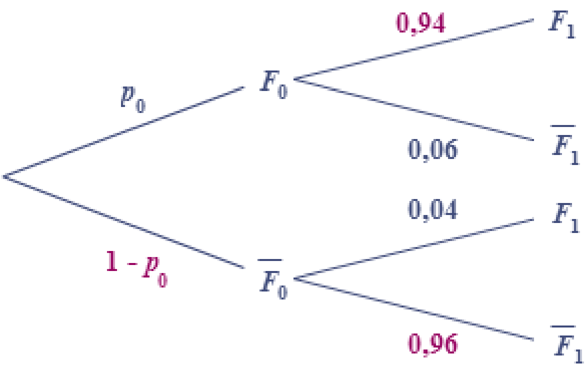
6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus

d'où $p_{F_0}(\overline{F_1}) = 0{,}06$ et $p_{F_0}(F_1) = 1 - p_{F_0}(\overline{F_1}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent

d'où $p_{\overline{F_0}}(F_1) = 0{,}04$ et $p_{\overline{F_0}}(\overline{F_1}) = 1 - p_{F_0}(F_1) = 1 - 00{,}04 = 0{,}96$





b. Montrer que $p_1 = 0,9\,p_0 + 0,04$.

<u>On sait que</u> F_0 et $\overline{F_0}$ forme une partition de l'univers

<u>D'après</u> la formule des probabilités totales : $p(F_1) = p(F_1 \cap F_0) + p(F_1 \cap \overline{F_0})$

<u>Or</u> $p(F_1 \cap F_0) = p_{F_0}(F_1) \times p(F_0) = 0{,}94 \times p_0$

et $p(F_1 \cap \overline{F_0}) = p_{\overline{F_0}}(F_1) \times p(\overline{F_0}) = 0{,}04 \times (1 - p0)$

<u>D'où</u> $p(F_1) = 0{,}94 \times p_0 + 0{,}04 \times (1 - p_0) = 0{,}9 \times p_0 + 0{,}04$

<u>Ainsi</u>, $p_1 = 0{,}9 \times p_0 + 0{,}04$

Pour la suite de l'exercice, on donne $\mathbf{p_0 = 0,55}$ et on note, pour tout entier naturel n, $\mathbf{F_n}$ l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et $\mathbf{p_n}$ sa probabilité. On admet de plus, que pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, $\mathbf{p_{n+1} = 0,9 \times p_n + 0,04}$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	I et N sont des entiers naturels P est un nombre réel
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	P prend la valeur 0,55
Traitement :	Pour J allant de 1 à N P prend la valeur 0,9P+0,04 Fin pour
Sortie :	Afficher P

a. Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur N=1.

Lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$, la boucle n'est exécutée qu'une fois
d'où P prend la valeur $0{,}9 \times 0{,}55 + 0{,}04 = 0{,}535$
Lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$, la valeur affichée en sortie est $0{,}535$.

b. Donner le rôle de cet algorithme.

Cet algorithme permet d'obtenir la probabilité de l'évènement « la personne interrogée a une opinion favorable N mois après l'élection du président »

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = p_n - 0,4$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0.

Pour tout entier n,
$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = 0{,}9 \times p_n + 0{,}04 - 0{,}4 = 0{,}9\, p_n - 0{,}36 = 0{,}9 \times (p_n - 0{,}4) = 0{,}9u_n$
Pour tout entier n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n$
donc (un) est une suite géométrique de raison 0,9
D'autre part, $u_0 = p_0 - 0{,}4$ d'où $u_0 = 0{,}55 - 0{,}4 = 0{,}15$
Donc (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 0{,}15$

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $u_0 = 0{,}15$
donc pour tout entier naturel n, $u_n = 0{,}15 \times 0{,}9^n$
Comme pour tout entier naturel n, $u_n = p_n - 0{,}4 \iff p_n = u_n + 0{,}4$
On en déduit : pour tout entier naturel n, $p_n = 0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4$

c. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

$0 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}9^n = 0$
d'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}15 \times 0{,}9^n = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 = 0{,}4$
Donct $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0{,}4$
La suite (p_n) converge vers 0,4.
Au bout d'un certain nombre de mois après l'élection, la cote de popularité du président restera proche de 40 %.

4. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation

$$\mathbf{0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leqslant 0,45.}$$

$0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leqslant 0,45 \iff 0,15 \times 0,9^n \leqslant 0,05$

$\iff 0,9^n \leqslant \dfrac{1}{3}$

$\iff \ln(0,9^n) \leqslant ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ La fonction $\ln()$ est strictement croissante

$\iff n \times \ln(0,9) \leqslant -\ln 3$ Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $\ln(a^n) = n \ln a$ et $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

$\iff n \geqslant -\frac{\ln 3}{\ln 0,9}$ $\ln 0,9 < 0$

Comme $-\frac{\ln 3}{\ln 0,9} \approx 10,4$, le plus petit entier $n \geqslant -\frac{\ln 3}{\ln 0,9}$ est 11.

L'ensemble des entiers naturels solutions de l'inéquation $0,15 \times 0,9^n + 0,4 \leqslant 0,45$ sont les entiers supérieurs ou égal à 11.

b. Interpréter le résultat trouvé.

Selon ce modèle, 11 mois après l'élection la cote de popularité du président sera inférieure à 45 %.

<u>Exercice 5</u> - 8 points -

<u>Partie A</u>

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10; 30]$ par $f(x) = 5 + x\, e^{0,2x-1}$.
On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f.
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 30]$, $f'(x) = (0,2x + 1)\, e^{0,2x-1}$.

On a $f(x) = 5 + x\, e^{0,2x-1}$

La fonction f est dérivable sur $[-10; 30]$ comme somme de produit fonctions dérivables sur $[-10; 30]$.

Alors $f = u + v \times w$ avec $u(x) = 5$ $u'(x) = 0$

$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$w(x) = e^{0,2x-1}$ $w'^{(x)} = 0,2 \times e^{0,2x-1}$

Donc $f' = u' + v' \times w + v \times w'$

Alors $f'(x) = 0 + 1 \times e^{0,2x-1} + x \times 0,2\, e^{0,2x-1}$

$f'(x) = (1 + 0,2\, x)e^{0,2x-1}$

2. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10; 30]$.

Pour déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10; 30]$, il faut donc étudier le signe de la dérivée f' sur $[-10; 30]$

On a $f'(x) = (1 + 0,2\, x)e^{0,2x-1}$

Or pour tout réel x, $e^{0,2x-1} > 0$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,2\, x$

x	-10		-5		30
$1 + 0,2x$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

$1 + 0,2x = 0$
$0,2x = -1$
$x = -\dfrac{1}{0,2}$
$x = -5$

Alors

x	-10		-5		30
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$5-10e^{-3}$	$\searrow$	$5-5e^{-2}$	$\nearrow$	$5+30e^{5}$

$$f(-10) = 5 - 10 \times\ e^{0,2\times(-10)-1} = 5 - 10 \times e^{-3} = 5 - 10\ e^{-3} \approx 4{,}50$$
$$f(-5) = 5 - 5 \times\ e^{0,2\times(-5)-1} = 5 - 5 \times e^{-2} = 5 - 5\ e^{-2} \approx 4{,}32$$
$$f(30) = 5 + 30 \times\ e^{0,2\times 30-1} = 5 + 30 \times e^{5} = 5 + 30\ e^{5} \approx 4457{,}39$$

3. Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;20]$ et donner un encadrement de α à $0,1$ près.

x	0		20
$f(x)$	5	$\nearrow$	$5+20e^{3}$

$$f(0) = 5 - 0 \times\ e^{0,2\times 0-1} = 5 - 0 = 5$$
$$f(20) = 5 + 20 \times\ e^{0,2\times 20-1} = 5 + 20 \times e^{3} = 5 + 20\ e^{5} \approx 406{,}71$$

Alors la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;20]$ à valeur dans $[5;406{,}71]$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires]
Donc l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0;20]$

Et $f(13) \approx 69{,}4 < 80$ et $f(14) \approx 89{,}7 > 80$
$f(13{,}5) \approx 78{,}9 < 80$ et $f(13{,}6) \approx 80{,}9 > 80$

Donc $13{,}5 \leq \alpha \leq 13{,}6$

4. Soit F la fonction définie sur $[-10;30]$ par $F(x) = 5(x - 5)e^{0,2x-1} + 5x$.
On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10\,;\,30]$.

a. Calculer la valeur exacte de $I = \int_5^{10} f(x)dx$.

$$I = \int_5^{10} f(x)dx = [F(x)]_5^{10} = F(10) - F(5)$$
$$I = (5(10 - 5)e^{0,2\times 10-1} + 5 \times 10) - (5(5 - 5)e^{0,2\times 5-1} + 5 \times 5)$$
$$I = (5 \times 5 \times e^{1} + 50) - (5 \times 0 \times e^{0} + 25)$$
$$I = 25\,e + 50 - 25$$
$$I = 25\,e + 25$$
$$I = 25(\,e + 1)$$

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5;10]$. (On donnera une valeur arrondie au centième.)

$$\mu = \frac{1}{10-5}\int_5^{10} f(x)dx = \frac{1}{5} \times 25(e+1) = 5(e+1) = 5e + 5 \approx 18{,}59$$

Partie B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial. Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0; 20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.

$f(0) = 5$ correspond au nombre de magasins existant en 2010 + 0, c'est-à-dire en 2010.

2. En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.

La fonction f est strictement croissante sur $[0; 20]$ et $f(\alpha) = 80$

Donc si $x > \alpha$, alors $f(x) > 80$

Or $\alpha \approx 13{,}5$, donc à partir de $x = 14$, $f(x)$ est supérieur à 80.

La chaîne possèdera 80 boutiques à partir de l'année 2010 + 14 soit 2024.

3. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2500 euros. Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

Les années 2015 et 2020 correspondent à $x = 5$ et $x = 10$; dans l'intervalle $[5; 10]$ on a vu que la valeur moyenne de la fonction f était de 18,59 ce qui veut dire qu'on peut estimer que la chaîne possédait en moyenne 18,59 magasins par an sur cette période.

Chaque magasin est ouvert 300 jours par an et a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 €, le chiffre d'affaires annuel moyen peut être estimé à : $13\,942\,500$ €

car $18{,}59 \times 300 \times 2500 = 13\,942\,500$ €