Durée : 2h **Calculatrice autorisée**

« Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. »
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Exercice 1 **- 4 points -**

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement. En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2010+n$;

on a donc $a_0 = 40$ et $a_{n+1} = 0{,}85\, a_n + 12$ pour tout entier naturel n.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et S sont des entiers naturels A est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de S
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à A la valeur 40

Traitement :	Tant_que $A \leqslant S$:
	    Affecter à n la valeur $n+1$
	    Affecter à A la valeur $0{,}85 \times A + 12$
	Fin Tant_que

Sortie :	Afficher n

1. Lorsque l'utilisateur entre la valeur $S = 70$, l'affichage en sortie est $n = 9$. Interpréter ce résultat.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$.

4. Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires ?

<u>Exercice 2</u> - 6 points -

Les deux parties sont indépendantes.

<u>Première partie</u>

Deux types de maladies A ou B affectent les animaux d'un pays.

On estime que :

- 3 % des animaux sont atteints de la maladie A et de la maladie B ;
- 12 % des animaux sont atteints seulement de la maladie A ;
- 8 % des animaux sont atteints de la maladie B.

On prend un animal de ce pays au hasard.

3

On note :

A l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie A»

B l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie B»

1. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint seulement de la maladie B. *(On pourra s'aider d'un tableau)*

2. Calculer la probabilité que cet animal ne soit atteint ni de la maladie A ni de la maladie B.

<u>Deuxième partie</u>

Un test permettant de détecter si un animal est malade est disponible sur le marché :

- Quand un animal est malade le test est positif dans 95% des cas.
- 98% des animaux sains ne réagissent pas au test.

Dans la suite de l'exercice on considère que 80% des animaux ne sont pas malades.

On note :

M l'évènement : « l'animal est malade»

T l'évènement : « le test effectué sur l'animal est positif»

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?

2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?

3. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade si le test est positif ?

<u>Exercice 3</u> - 10 points -

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1; 9]$ par : $f(x) = 2x - 4\ln(x)$.
On désigne par (C) sa courbe représentative.

1. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[1; 9]$ puis dresser son tableau de variation.

2. Calculer $f''(x)$ puis étudier la convexité de .

3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e.

4. a) Préciser la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

   b) En déduire que pour tout x de $[1; 9]$ $\quad x - e\ln(x) \geq 0$.

Exercice 1 **- 4 points -**

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement. En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.
On note a_n le nombre d'adhérents pour l'année $2010+n$;
on a donc $a_0 = 40$ et $a_{n+1} = 0,85\ a_n + 12$ pour tout entier naturel n.

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	**n et S sont des entiers naturels** **A est un réel**
Entrée :	**Demander à l'utilisateur la valeur de S**
Initialisation :	**Affecter à n la valeur 0** **Affecter à A la valeur 40**
Traitement :	**Tant_que $A \leqslant S$:** **Affecter à n la valeur $n+1$** **Affecter à A la valeur $0,85 \times A + 12$** **Fin Tant_que**
Sortie :	**Afficher n**

1. Lorsque l'utilisateur entre la valeur $S = 70$, l'affichage en sortie est $n = 9$. Interpréter ce résultat.

En supposant que la suite (a_n) est croissante, cet algorithme permet de déterminer le rang n à partir duquel les termes de la suite (a_n) sont supérieurs à S
En 2019, le nombre d'abonnés à cette revue dépassera 70 mille.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geqslant 0$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n,
$$u_{n+1} = a_{n+1} - 80 = 0{,}85\ a_n + 12 - 80 = 0{,}85\ a_n - 68 = 0{,}85 \times (a_n - 80) = 0{,}85\ u_n$$

Et $u_0 = a_0 - 80 = 40 - 80 = -40$

Ainsi, la suite (un) est une suite géométrique de raison 0,85 et de premier terme $u_0 = -40$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.

Pour tout entier n, $u_n = a_n - 80$,

$D'o$ù pour tout entier n, $a_n = u_n + 80$.

Or (un)est une suite géométrique de raison $0{,}85$ et de premier terme $u_0 = -40$

Donc pour tout entier n, $u_n = -40 \times 0{,}85^n$.

Par conséquent, pour tout entier , $a_n = 80 - 40 \times 0{,}85^n$

4. Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 100 mille exemplaires ?

Méthode 1

On cherche les solutions éventuelles de l'équation $a_n = 100$.

Soit $80 - 40 \times 0{,}85^n = 100$

$-40 \times 0{,}85^n = 20$

$0{,}85^n = -0{,}5$

Or pour tout entier n, $0{,}85^n > 0$,

Donc l'équation $a_n = 100$ n'a pas de solution.

Selon ce modèle, il n'est pas possible d'espérer 100 mille abonnés.

Méthode 2

$0 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}85^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 40 \times 0{,}85^n = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 80 - 40 \times 0{,}85^n = 80$

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 80$

La suite (a_n) converge vers 80.

D'autre part, pour tout entier n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (80 - 40 \times 0{,}85^{n+1}) - (80 - 40 \times 0{,}85^n) \\ &= -40 \times 0{,}85^{n+1} + 40 \times 0{,}85^n \\ &= 40 \times 0{,}85^n \times (1 - 0{,}85) \\ &= 6 \times 0{,}85^n \end{aligned}$$

Or pour tout entier n, $0{,}85^n > 0$,

Donc pour tout entier n, $a_{n+1} - a_n > 0$.

La suite (a_n) est strictement croissante.

La suite (a_n) est strictement croissante et converge vers 80 donc le nombre maximum d'abonnés que le directeur de cette revue peut espérer est de 80 mille.

Exercice 2 - 6 points -

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie

Deux types de maladies A ou B affectent les animaux d'un pays.

On estime que :

3 % des animaux sont atteints de la maladie A et de la maladie B ;

12 % des animaux sont atteints seulement de la maladie A ;

8 % des animaux sont atteints de la maladie B.

On prend un animal de ce pays au hasard.

On note :

A l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie A»

B l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie B»

1. Calculer la probabilité que cet animal soit atteint seulement de la maladie B. ***(On pourra s'aider d'un tableau)***

Les données de l'énoncé sont :

	B	$\overline{B}$	Total
A	0,03	0,12	
$\overline{A}$			
Total	0,08		1

Il s'agit de déterminer la probabilité pour un animal d'être atteint de la maladie B et de ne pas être atteint de la maladie A, c’est-à-dire $B \cap \bar{A}$.

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$$
$$0{,}08 = 0{,}03 + p(B \cap \bar{A})$$
$$p(B \cap \bar{A}) = 0{,}08 - 0{,}03 = 0{,}05$$

La probabilité qu'un animal ne soit atteint que de la maladie B est de 0,05.

2. Calculer la probabilité que cet animal ne soit atteint ni de la maladie A ni de la maladie B.

$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 0{,}92$

Or d'après la formule des probabilités totales

$p(\bar{B}) = p(\bar{B} \cap A) + p(\bar{B} \cap \bar{A})$

Soit : $p(\bar{B} \cap \bar{A}) = p(\bar{B}) - p(\bar{B} \cap A) = 0{,}92 - 0{,}12 = 0{,}8$

La probabilité qu'un animal ne soit pas malade est de 0,8

<u>Deuxième partie</u>

Un test permettant de détecter si un animal est malade est disponible sur le marché :

- **Quand un animal est malade le test est positif dans 95% des cas.**
- **98% des animaux sains ne réagissent pas au test.**

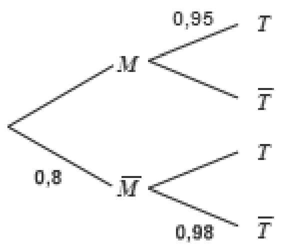
Dans la suite de l’exercice on considère que 80% des animaux ne sont pas malades.

On note :

M l’évènement : « l’animal est malade»

T l’évènement : « le test effectué sur l’animal est positif»

Traduisons les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré



1. Quelle est la probabilité pour un animal d’être malade et de réagir au test ?

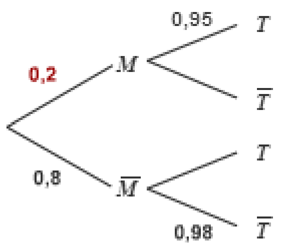
Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement $T \cap M$.

Or $p(M) = 1 - p(\bar{M}) = 0{,}2$

Et

$p(T \cap M) = p_M(T) \times p(M) = 0{,}95 \times 0{,}2 = 0{,}19$

Ainsi la probabilité pour un animal d’être malade et de réagir au test est de 0,19.



2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?

Sur arbre d'après la règle des nœuds :

$p_{\bar{M}}(T) = 1 - p_{\bar{M}}(\bar{T}) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$

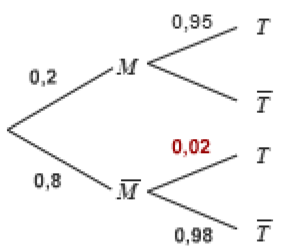
et

$p(T \cap \bar{M}) = p_{\bar{M}}(T) \times p(\bar{M}) = 0{,}02 \times 0{,}8 = 0{,}016.$

Donc d'après la formule des probabilités totales

$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \bar{M}) = 0{,}19 + 0{,}016 = 0{,}206$

La probabilité pour que le test soit positif est de 0,206.



3. Quelle est la probabilité pour un animal d’être malade si le test est positif ?

Il s'agit de calculer la probabilité de l'évènement M sachant que le test est positif. C'est la probabilité de M conditionnée par T.

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0{,}19}{0{,}206} = \frac{95}{103} \approx 0{,}922$$

La probabilité pour un animal d’être malade si le test est positif est d’environ 0,922.

<u>Exercice 3</u> - 10 points -

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;9]$ par : $f(x) = 2x - 4\ln(x)$.
On désigne par (C) sa courbe représentative.
1. Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[1;9]$ puis dresser son tableau de variation.

<u>On a</u> $f(x) = 2x - 4\ln(x)$
<u>D'où</u> la fonction f est dérivable sur $[1;9]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;9]$
<u>Donc</u> $f'(x) = 2 - 4 \times \frac{1}{x} = 2 - \frac{4}{x} = \frac{2x-4}{x}$

x	1		2		9
Signe de $2x-4$		$-$	0	+	
Signe de x		+		+	
Signe $f'(x)$		$-$	0	+	
Variation de f	2	↘	$f(2)$	↗	$f(9)$

$f(2) = 2 \times 2 - 4\ln(2) = 4 - 4\ln(2)$
$f(9) = 2 \times 9 - 4\ln(9) = 18 - 4\ln(3^2) = 18 - 4 \times 2\ln(3) = 18 - 8\ln(3)$

2. Calculer $f''(x)$ puis étudier la convexité de .

<u>On a</u> $f'(x) = \frac{2x-4}{x}$
<u>D'où</u> la fonction f' est dérivable sur $[1;9]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[1;9]$
<u>Donc</u> $f' = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 4$
$u'(x) = 2$
$v(x) = x$
$v'(x) = 1$
<u>Et</u> $f'' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
<u>D'où</u> $f''(x) = \frac{2 \times x - 1 \times (2x-4)}{x^2} = \frac{2x - 2x + 4}{x^2} = \frac{4}{x^2}$
$f''(x) = \frac{4}{x^2}$

<u>On a</u> $f'(x) = 2 - \frac{4}{x}$
<u>D'où</u> la fonction f' est dérivable sur $[1;9]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;9]$
<u>D'où</u> $f'(x) = 2 - \frac{4}{x} = 2 - 4 \times \frac{1}{x}$
$f''(x) = 2 - 4 \times \frac{-1}{x^2}$
$f''(x) = \frac{4}{x^2}$

<u>Ensuite</u> $x \in [1;9]$ $x^2 > 0$ $\frac{4}{x^2} > 0$ $f''(x) > 0$
<u>Alors</u> f' est croissante sur $[1;9]$
<u>Donc</u> f' est convexe sur $[1;9]$

3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse e.

(T) équation de tangente en e $y = f'(e)(x-e) + f(e)$

Et $f(e) = 2 \times e - 4\ln(e) = 2e - 4$
$f'(e) = 2 - \frac{4}{e}$

Alors $y = \left(2 - \frac{4}{e}\right)(x-e) + (2e-4)$
$y = \left(2 - \frac{4}{e}\right)x - 2e + \frac{4}{e} \times e + 2e - 4$
(T) $y = \left(2 - \frac{4}{e}\right)x$

4. a) Préciser la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente (T).

On sait que la fonction f est convexe sur $[1\,;9]$
Donc la courbe (C) est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[1\,;9]$
D'où, en particulier, la courbe (C) est au-dessus de (T)

b) En déduire que pour tout x de $[1;9]$ $\quad x - e\ln(x) \geq 0$.

Comme la courbe (C) est au-dessus de (T)
Alors pour tout $[1;9]$

$$f(x) \geq \left(2-\frac{4}{e}\right)x$$
$$2x - 4\ln(x) \geq \left(2-\frac{4}{e}\right)x$$
$$2x - 4\ln(x) \geq 2x - \frac{4}{e}x$$
$$2x - 4\ln(x) - 2x + \frac{4}{e}x \geq 0$$
$$-4\ln(x) + \frac{4}{e}x \geq 0$$ (on multiplie les deux membres par e)
$$4x - 4e\ln(x) \geq 0$$
$$x - e\ln(x) \geq 0$$ (on multiplie les deux membres par 4)

Donc pour tout $[1;9]$ $\quad x - e\ln(x) \geq 0$