Exercice 1 **- 5 points -**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des cinq questions, quatre affirmations sont proposées ; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte en justifier le choix effectué.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$. On a donc $U_0 = 40\,000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0{,}875 \times U_n + 1\,200$.
On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$.

1. La valeur de U_1 est :
   a. 6 200 b. 30 400 c. 33 800 d. 36 200

2. La suite (V_n) est :
   a. géométrique de raison −12,5%
   b. géométrique de raison −0,875
   c. géométrique de raison 0,875
   d. arithmétique de raison −9600

3. Pour tout n, $U_n = \cdots$
   a. $30400 \times 0{,}875^n + 9600$
   b. $40000 \times 0{,}875^n - 9600$
   c. $30400 \times 0{,}875^n + 1200$
   d. $40000 \times 0{,}875^n + 1200$

4. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :        U, N

Initialisation :   U prend la valeur 40 000
                   N prend la valeur 0
                   Affecter à A la valeur 40

Traitement :       Tant_que U > 10 000 :
                       N prend la valeur  N + 1
                       U prend la valeur  0,875 × U + 1 200
                   Fin Tant_que

Sortie :           Afficher N
```

Cet algorithme permet d'obtenir :
   a. valeur de $U_{40\,0000}$
   b. le nombre de termes inférieurs à $1\,200$
   c. toutes les valeurs de U_0 à U_N
   d. le plus petit rang n pour lequel on a $\mathrm{U_n} \leqslant 10\,000$

5. La valeur affichée est :
   a. 33 b. 34 c. 9600 d. 9970,8

Exercice 2 **- 6 points -**

Dans une région imaginaire, en mars, la probabilité qu'il pleuve chaque jour est $\frac{1}{4}$.
S'il pleut, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.
S'il ne pleut pas, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.
On note :

A l'évènement "il pleut"
H l'évènement "Bianca arrive à l'heure à son travail".

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.

2. Quelle est la probabilité qu'un jour de mars donné, il pleuve et que Bianca arrive à l'heure à son travail ?

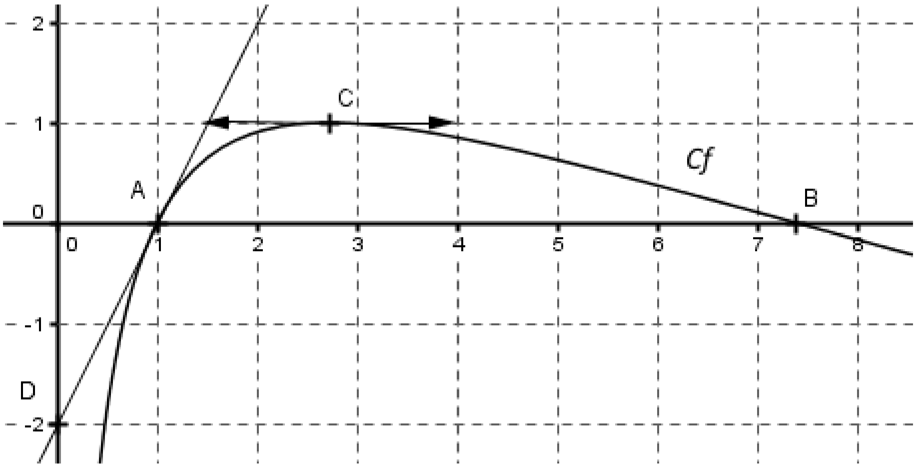
3. Montrer que la probabilité qu'un jour de mars donné, Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

4. Un jour de mars donné, Bianca arrive à l'heure à son travail. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?

5. Sur une période de 4 jours de mars, quelle est la probabilité que Bianca arrive à l'heure au moins une fois ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

Exercice 3 **- 5 points -**

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x)\ \ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $A(1; 0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe C_f est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe C_f coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).

2. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.

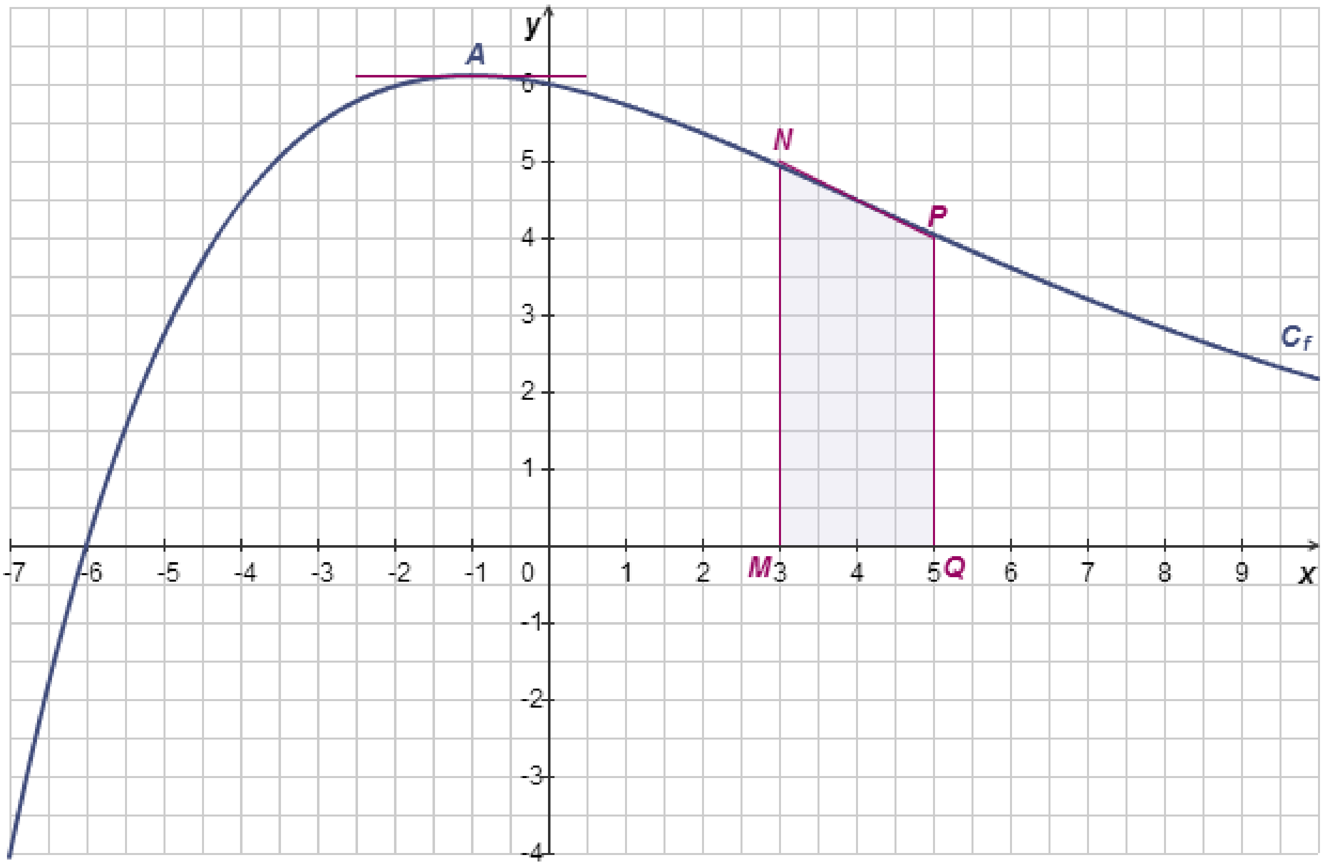
   b. Déterminer les coordonnées du point C (la valeur exacte est demandée).

   c. Déterminer l'ordonnée du point D (la valeur exacte est demandée).

Exercice 4 - 14 points -

PARTIE A : Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe C_f représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.

2. Déterminer le signe de $f'(4)$.

3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine colorié.

PARTIE B : Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)e^{-0,2x}$. On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x, on a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)e^{-0,2x}$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Montrer que $f''(x) = (0,04x - 0,16)e^{-0,2x}$, pour tout réel x.

   b. Étudier la convexité de la fonction f.

   c. Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.

3. a. Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x - 55)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer l'intégrale $I = \int_3^5 f(x)\,dx$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

<u>PARTIE C :</u> Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1;8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.

2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.

3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par : $E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x$ sur $[1;8]$

Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.

Exercice 1 **- 5 points -** **Centre étranger – juin 2013**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des cinq questions, quatre affirmations sont proposées ; une seule de ces réponses convient. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte en justifier le choix effectué.
Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5% de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$. On a donc $U_0 = 40\,000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.
On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$.

1. La valeur de U_1 est :

a. **6 200** **b.** **30 400** **c.** **33 800** **d.** **36 200**

$U_1 = 0{,}875 \times U_0 + 1200 = 0{,}875 \times 40000 + 1200 = 36200$

Réponse : d. 36 200

2. La suite (V_n) est :

a. **géométrique de raison −12,5%** **b.** **géométrique de raison −0,875**
c. **géométrique de raison 0,875** **d.** **arithmétique de raison −9600**

Pour tout entier n,

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 9600 \\ &= 0{,}875\, U_n + 1200 - 9600 \\ &= 0{,}875\, U_n - 8400 \\ &= 0{,}875 \times (U_n - 9600) \\ &= 0{,}875\, V_n \end{aligned}$$

Donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,875.
Réponse : c. géométrique de raison 0,875

3. Pour tout n, $U_n = \cdots$

a. $\mathbf{30400 \times 0,875^n + 9600}$ **b.** $\mathbf{40000 \times 0,875^n - 9600}$
c. $\mathbf{30400 \times 0,875^n + 1200}$ **d.** $\mathbf{40000 \times 0,875^n + 1200}$

Le premier terme de la suite (V_n) est : $V_0 = U_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$
Comme (V_n) est une suite géométrique de raison 0,875 et $V0 = 30400$
Alors , pour tout entier naturel n, $V_n = 30400 \times 0{,}875^n$.
Comme pour tout entier $n, V_n = U_n - 9600$ alors $U_n = V_n + 9600$.
Soit pour tout entier n, $U_n = 30400 \times 0{,}875^n + 9600$.
Réponse : a. $30400 \times 0{,}875^n + 9600$

4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	**U, N**
Initialisation :	**U prend la valeur 40 000** **N prend la valeur 0** **Affecter à A la valeur 40**
Traitement :	**Tant_que $U > 10\,000$:** **N prend la valeur $N + 1$** **U prend la valeur $0,875 \times U + 1\,200$** **Fin Tant_que**
Sortie :	**Afficher N**

Cet algorithme permet d'obtenir :

a. valeur de $U_{40\,0000}$

b. le nombre de termes inférieurs à $1\,200$

c. toutes les valeurs de U_0 à U_N

d. le plus petit rang n pour lequel on a $\mathrm{U_n} \leqslant 10\,000$

L'objet de cet algorithme, est la suite (Un).

- L'initialisation « U prend la valeur 40 000 » correspond au terme initial $U_0 = 40\,000$
- L'affectation « U prend la valeur 0,875×U+1 200 » correspond à la relation de récurrence $U_{n+1} = 0,875 \times U_n + 1\,200$.
- La condition de poursuite de la boucle Tant que est U>10000. Cette boucle se termine donc quand U⩽10000.

Réponse : d. le plus petit rang n pour lequel on a $\mathrm{U_n} \leqslant 10\,000$

5. La valeur affichée est :

a. 33 **b. 34** **c. 9600** **d. 9970,8**

On cherche le plus petit entier n tel que $U_n \leqslant 10000$.

$$30400 \times 0,875^n + 9600 \leqslant 10000$$
$$30400 \times 0,875^n \leqslant 400$$
$$0,875^n \leqslant \frac{4}{304}$$
$$\ln(0,875^n) \leqslant \ln\left(\frac{1}{76}\right)$$
$$n\ln(0,875) \leqslant -\ln(76)$$
$$n \geqslant -\frac{\ln(76)}{\ln(0,875)}$$

Or $-\frac{\ln(76)}{\ln(0,875)} \approx 32,4$

Par conséquent, le plus petit entier n pour lequel $U_n \leqslant 10000$ est 33.

Réponse : a. 33

<u>Exercice 2</u> - 6 points - Centre étranger – juin 2007

Dans une région imaginaire, en mars, la probabilité qu'il pleuve chaque jour est $\frac{1}{4}$.
S'il pleut, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$.
S'il ne pleut pas, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$.
On note :
A l'évènement "il pleut"
H l'évènement "Bianca arrive à l'heure à son travail".

1. Représenter par un arbre de probabilité la situation ci-dessus.

Pour tous les jours de mars, la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{4}$

alors $p(A) = \frac{1}{4}$ et $p(\bar{A}) = \frac{3}{4}$

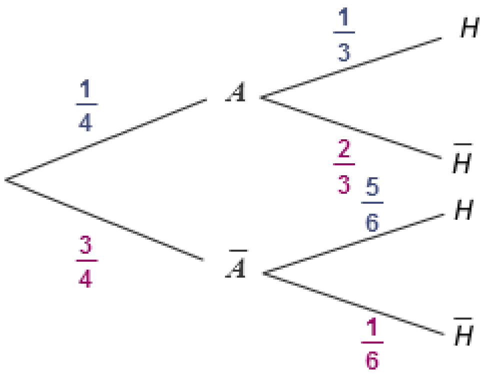
S'il pleut, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{1}{3}$

alors $p_A(H) = \frac{1}{3}$ et $p_A(\bar{H}) = \frac{2}{3}$.

S'il ne pleut pas, la probabilité que Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{5}{6}$

alors $p_{\bar{A}}(H) = \frac{5}{6}$ et $p_{\bar{A}}(\bar{H}) = \frac{1}{6}$

D'où l'arbre de probabilité traduisant la situation :



2. Quelle est la probabilité qu'un jour de mars donné, il pleuve et que Bianca arrive à l'heure à son travail ?

$$p(A \cap H) = p_A(H) \times p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

La probabilité qu'un jour de mars donné, il pleuve et que Bianca arrive à l'heure à son travail est de $\frac{1}{12}$

3. Montrer que la probabilité qu'un jour de mars donné, Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$.

Les évènements A et H forment une partition de l'univers
D'après la formule des probabilités totales :

$$p(H) = p(H \cap A) + p(H \cap \bar{A})$$

$$p(H) = p(H \cap A) + p_{\bar{A}}(H) \times p(\bar{A}) = \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{12} + \frac{15}{24} = \frac{2 + 15}{24} = \frac{17}{24}$$

La probabilité qu'un jour de mars donné, Bianca arrive à l'heure à son travail est $\frac{17}{24}$

4. Un jour de mars donné, Bianca arrive à l'heure à son travail. Quelle est la probabilité qu'il ait plu ce jour là ?

$$p_H(A) = \frac{p(H \cap A)}{p(H)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{17}{24}} = \frac{1}{12} \times \frac{24}{17} = \frac{2}{17}$$

La probabilité qu'il ait plu sachant que Bianca arrive à l'heure est $\frac{2}{17}$

5. Sur une période de 4 jours de mars, quelle est la probabilité que Bianca arrive à l'heure au moins une fois ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

L'évènement "Sur une période de 4 jours, Bianca arrive au moins une fois à l'heure" est l'évènement contraire de l'évènement "Bianca n'arrive pas à l'heure les quatre jours".
Or la probabilité de l'évènement "Bianca n'arrive pas à l'heure à son travail" est :

$$p(\overline{H}) = 1 - p(H) = 1 - \frac{17}{24} = \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$$

Sur une période de 4 jours, nous sommes dans le cas d'une répétition de quatre épreuves aléatoires et indépendantes. La loi de probabilité associée au nombre de jours où Bianca n'arrive pas à l'heure est une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{7}{24}$.
D'où la probabilité de l'évènement "Bianca n'arrive pas à l'heure les quatre jours" est : $\left(\frac{7}{24}\right)^4$

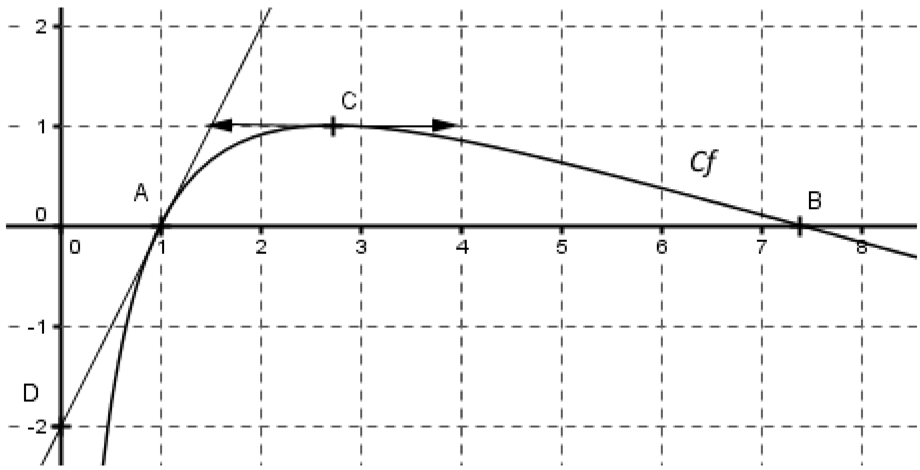
Par conséquent, la probabilité que Bianca n'arrive pas à l'heure au moins une fois est :

$$1 - \left(\frac{7}{24}\right)^4 \approx 0{,}9927$$

Arrondie à 10^{-3} près, la probabilité que Bianca arrive à l'heure au moins une fois est 0,993.

<u>Exercice 3</u> - 5 points - (1+1,5+1+1,5)

On admettra que les fonctions considérées dans cet exercice sont dérivables sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = (2 - \ln x)\ \ln x$.
La figure ci-dessous donne la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en $A(1; 0)$ et en B.
La tangente en C à la courbe C_f est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente en A à la courbe C_f coupe l'axe des ordonnées en D.



1. Déterminer l'abscisse du point B (la valeur exacte est demandée).

Soit la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : (x) = (2 – ln x)ln x . 1)

La courbe $\boldsymbol{C_f}$ coupe l'axe des abscisses en $A(1;0)$ et en B

Donc, l'abscisse du point B est la solution de l'équation $f(x) = 0$

Or, $f(x) = 0$

$(2 - \ln x)\ \ln x = 0$

Soit $2 - \ln x = 0$ $\quad 2 = \ln x$ $\quad e^2 = e^{\ln x}$ $\quad e^2 = x$

Soit $\ln x = 0$ $\quad e^{\ln x} = e^0$ $\quad x = 1$

Ainsi, le point B a pour abscisse $x = e^2$

2. On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.

On a $f(x) = \left(2 - \ln x\right)\ \ln x$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors $f = u \times v$ avec $u(x) = 2 - \ln x$ $\quad u'(x) = -\frac{1}{x}$

$v(x) = \ln x$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

d'où $f' = u'v + uv'$

Alors $f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + \frac{1}{x} \times (2 - \ln x)$

$$= \frac{-\ln x + 2 - \ln x}{x}$$

$$= \frac{-2\ln x + 2}{x}$$

$$= \frac{2(1 - \ln x)}{x}$$

Donc $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$

b. Déterminer les coordonnées du point C (la valeur exacte est demandée).

La tangente en C à la courbe C_f est parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(x_C) = 0$

C'est-à-dire que l'abscisse du point C est solution de l'équation $f'(x) = 0$.

Alors $\frac{2(1-\ln x)}{x} = 0$

$1 - \ln x = 0$

$\ln x = 1$

$\ln x = \ln e^1$

$x = e$

Donc, le point C a pour abscisse e.

c. Déterminer l'ordonnée du point D (la valeur exacte est demandée).

Le point D est l'intersection de la tangente en A à la courbe C_f avec l'axe des ordonnées.

Commençons donc par déterminer l'équation de cette tangente.

La tangente en A à la courbe C_f a pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Et $f(1) = (2 - \ln 1) \times \ln 1 = 0$ et $f'(1) = \frac{2(1-\ln 1)}{1} = 2$

Ainsi, cette tangente a pour équation : $y = 2x - 2$.

On cherche donc le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des ordonnées

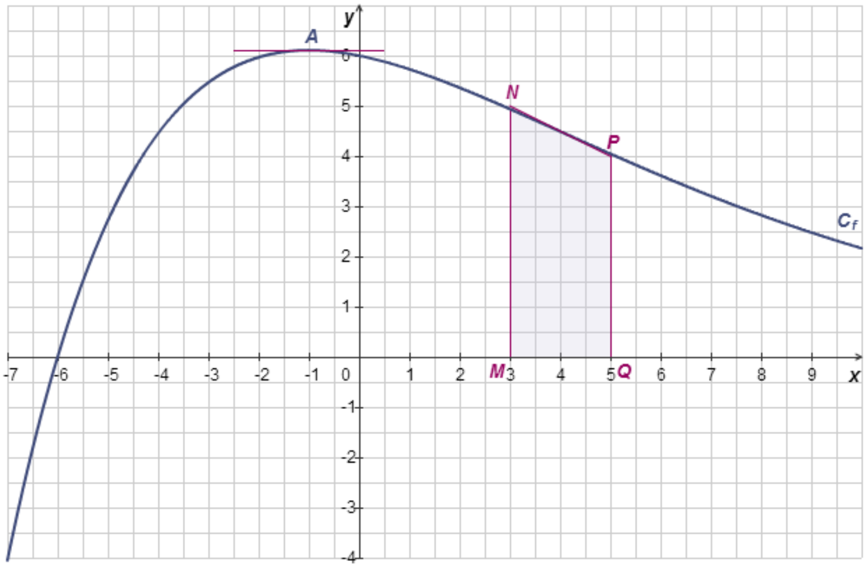
D'où $x = 0$ et $y = -2$

Donc le point D a pour ordonnée -2

<u>Exercice 4</u> - 14 points -

<u>PARTIE A :</u> Lecture graphique

On donne ci-dessous, la courbe C_f représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé.
La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. Donner la valeur de $f'(-1)$.

Le nombre dérivé $f'(-1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -1
La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses
<u>Donc</u> $f'(-1) = 0$

2. Déterminer le signe de $f'(4)$.

D'après sa courbe représentative : la fonction f étant décroissante sur l'intervalle $[-1; +\infty[$, sa dérivée est négative sur cet intervalle.
<u>Donc</u> $f'(4) \leqslant 0$

3. Déterminer une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine colorié.

Une valeur approchée à l'unité près de l'aire du domaine colorié est égale à l'aire S du trapèze MNPQ:

$$S = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(MN + PQ) \times MQ}{2} = \frac{(5+4) \times 2}{2} = 9$$

L'aire du domaine colorié vaut environ 9 unités d'aire

<u>PARTIE B :</u> Étude d'une fonction

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = (x+6)e^{-0,2x}$. On note f' sa fonction dérivée et on admet que pour tout réel x, on a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)e^{-0,2x}$.

1. Etudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Les variations de f se déduisent du signe de sa dérivée.
Or pour tout réel x, $e^{-0,2x} > 0$.
Donc $f'(x)$ est du même signe que l'expression $(-0,2x - 0,2)$

D'où le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Signe $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de $f(x)$		↗	$5\,e^{0,2}$	↘	

$$f(-1) = (-1+6)e^{-0,2\times(-1)} = 5\,e^{0,2}$$

2. a. Montrer que $f''(x) = (0,04x - 0,16)e^{-0,2x}$, pour tout réel x.

La dérivée seconde de la fonction f est égale à la dérivée de la fonction f'.

On a $f'(x) = (-0,2x - 0,2)e^{-0,2x}$

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors $f' = u \times v$ avec $u(x) = -0,2x - 0,2$ $\quad u'(x) = -0,2$

$v(x) = e^{-0,2x}$ $\quad v'(x) = -0,2\,e^{-0,2}$

d'où $f'' = u'v + uv'$

Alors pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -0,2 \times e^{-0,2x} + (-0,2x - 0,2) \times (-0,2\,e^{-0,2x}) \\ &= -0,2\,e^{-0,2x} \times (1 - 0,2x - 0,2) \\ &= e^{-0,2x} \times (0,04x - 0,16) \end{aligned}$$

Ainsi, f'' est la fonction définie pour tout réel x par $f''(x) = (0,04x - 0,16)e^{-0,2x}$.

b. Étudier la convexité de la fonction f.

L'étude de la convexité de la fonction f se déduit du signe de sa dérivée seconde.

On a $f''(x) = e^{-0,2x} \times (0,04x - 0,16)$

Or pour tout réel x, $e^{-0,2x} > 0$.

Donc $f''(x)$ est du même signe que l'expression $(0,04x - 0,16)$

D'où le tableau du signe de la dérivée seconde :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Sur l'intervalle $]-\infty; 4]$, la fonction f est concave.

Sur l'intervalle $[4; +\infty[$, la fonction f est convexe.

c. Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion et déterminer ses coordonnées.

En 4, la dérivée seconde de la fonction f s'annule en changeant de signe,

Donc la courbe représentative de de la fonction f admet le point d'abscisse 4 comme point d'inflexion.

D'autre part, $f(4) = (4+6)e^{-0,2\times4} = 10e^{-0,8}$

Donc la courbe représentative de de la fonction f admet le point de coordonnées $(4; 10\,e^{-0,8})$comme point d'inflexion

3. a. Démontrer que la fonction F définie pour tout réel x par $F(x) = (-5x - 55)e^{-0,2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

On a $F(x) = (-5x - 55)e^{-0,2x}$

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors $F = u \times v$ avec $u(x) = -5x - 55$ $\quad u'(x) = -5$

$v(x) = e^{-0,2x}$ $\quad v'(x) = -0,2\,e^{-0,2}$

d'où $F' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned} \text{Alors } F'(x) &= -5 \times e^{-0,2x} + (-5x - 55) \times (-0,2\,e^{-0,2x}) \\ &= e^{-0,2x} \times (-5 - 5x \times (-0,2) - 55 \times (-0,2)) \\ &= e^{-0,2x} \times (-5 + x + 11) \\ &= e^{-0,2x} \times (x+6) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer l'intégrale $I = \int_3^5 f(x)\, dx$; on donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au centième près.

$$I = \int_3^5 f(x)\, dx \; = [F(x)]_3^5 = F(5) - F(3) = (-5 \times 5 - 55)e^{-0,2\times5} - (-5 \times 3 - 55)e^{-0,2\times3}$$
$$I = (-25 - 55)e^{-1} - (-15 - 55)e^{-0,6} = (-80)e^{-1} - (-70)e^{-0,6} = 70\, e^{-0,6} - 80\, e^{-1} \approx 8,99$$

<u>Donc</u> $I = 70\, e^{-0,6} - 80\, e^{-1} \approx 8,99$
(On retrouve bien le résultat de 3 de la partie A)

<u>PARTIE C :</u> Application économique
La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[1; 8]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.
Le nombre $f(x)$ représente la quantité demandée, exprimée en centaines de milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Calculer le nombre d'objets demandés, au millier près, lorsque le prix unitaire est fixé à 4 euros.

$f(4) = (4 + 6)e^{-0,2\times4} = 10e^{-0,8} \approx 4,49$
Pour un prix unitaire de 4 euros, la demande est d'environ 449 000 objets.

2. En utilisant les résultats de la partie B, déterminer la demande moyenne arrondie au millier d'objets près, lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[3; 5]$ est :
$$m = \frac{1}{5-3}\int_3^5 f(x)\, dx = \frac{1}{2} \times (70\, e^{-0,6} - 80\, e^{-1}) \approx 4,49$$
Lorsque le prix unitaire varie entre 3 et 5 euros, la demande moyenne est d'environ 449 000 objets.

3. L'élasticité $E(x)$ de la demande par rapport au prix est le pourcentage de variation de la demande pour une augmentation de 1 % du prix. On admet qu'une bonne approximation de $E(x)$ est donnée par : $E(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \times x$ sur $[1; 8]$
Calculer $E(4)$. Interpréter le résultat.

$$E(4) = \frac{f'(4)}{f(4)} \times 4 = \frac{-e^{-0,8}}{10e^{-0,8}} \times 4 = -\frac{4}{10} = -0,4$$
Lorsque le prix est de 4 euros, une augmentation de de 1 % du prix entraîne une baisse de 0,4 % de la quantité demandée.