T ES/L	DEVOIR SURVEILLE° 3	16 JANVIER 2015

Durée : 3h **Calculatrice autorisée**

NOM : **Prénom :**

« Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. »
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

<u>Exercice 1</u> - 7+1 (BONUS) points -

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi.

Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS.

Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les évènements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».

4. On suppose que la probabilité de W est : $p(W) = 0{,}7$.

   a) Démontrer que : $p(W \cap \bar{G}) = 0{,}46$.

   b) Démontrer que $p_{\bar{G}}(W) \approx 0{,}767$. Compléter l'arbre du 2.

5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

6. On appelle X la variable aléatoire égale au coût de revient de ces deux options. Déterminer la loi de probabilité de X en complétant ce tableau, sans justifier et sans détailler les calculs.

Arrondir les probabilités au centième près.

Évènement	$\bar{G} \cap \bar{W}$	$\bar{G} \cap W$	$G \cap \bar{W}$	$G \cap W$
Coût de revient des 2 options				
Probabilité				

7. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat. (BONUS)

Exercice 2 **- 7 points -**

Partie A : Etude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 100$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}8\, u_n + 3$$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 15$

   a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n

   c. Justifier que $u_n = 85 \times 0{,}8^n + 15$.

2. Déterminer le sens de variation de (u_n).

3. Déterminer (par la méthode de votre choix) le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 16$.

Partie B : Une situation concrète

En 2000, un pays comptait environ 100 milliers d'hectares de forêt. On estime que, chaque décennie, 20% de cette couverture forestière disparaît. Afin de lutter contre ce fléau, chaque décennie, une organisation plante des arbres sur 3 milliers d'hectares.

1. Combien d'hectares y aura-t-il : a) en 2010 ? b) en 2020 ?

2. On admet que la suite (u_n) définie en partie A modélise cette situation. L'action de l'organisation est-elle suffisante pour retrouver dans quelques décennies la couverture forestière de 2000 ?

3. Recopier sur votre copie et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle la couverture forestière sera inférieure à 16000 hectares.

```
Stocker 0 dans N et 100 dans U
Tant que …………………… faire
      Stocker …………………… dans N
      Stocker …………………… dans U
Fin tant que
Afficher N .
```

<u>Exercice 3</u> - 5 points -

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis <u>justifier cette réponse</u>.

Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 point. Une réponse fausse non justifiée enlève 0,5 point.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x\, e^{-x}$.

Q1 - On note f' la fonction dérivée de la fonction . Pour tout réel x on a :

a) $f'(x) = e^{-x}$ b) $f'(x) = (1 + x)\, e^{-x}$ c) $f'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$

Q2 - La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

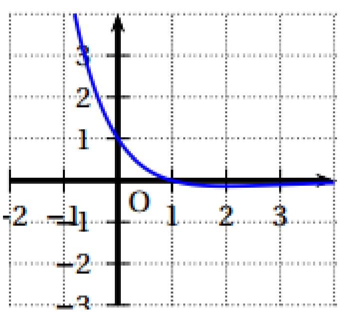
a) $-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ c) $0{,}303$

Q3 - La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

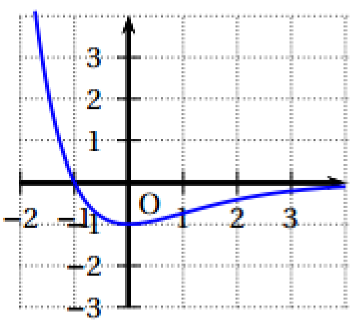
a) $y = 0$ b) $y = -x$ c) $y = x$

Q4 - Une des trois courbes est la représentation graphique d'une fonction g telle que $g' = f$. Laquelle ?

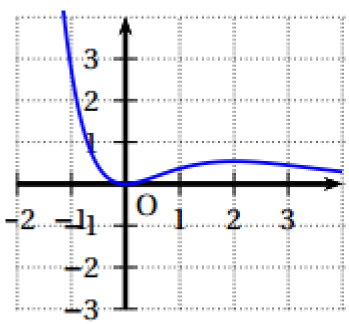
a)



b)



c)



Q5 - On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[-6; 6]$ par : $h(x) = exp[f(x)] = e^{f(x)}$.

On peut affirmer que :

a) la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[-6; 6]$

b) la fonction h a les variations inverses de celles de f sur l'intervalle $[-6\,; 6]$

c) la fonction h a les mêmes variations que f sur l'intervalle $[-6; 6]$

Exercice 4 **- 7,5 points -**

Une entreprise peut extraire entre 2000 et 15 000 tonnes de minerai d'une carrière.
Le résultat d'exploitation qu'elle envisage, en millions d'euros, est donné par :

$$f(x) = (4x - 13)e^{-0,2\,x}$$

où x est la quantité de minerai extraite en milliers de tonnes, $x \in [2\,;15]$.

1. a. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[2\,;15]$

   b. Interpréter économiquement le résultat.

2. a. Montrer que $f'(x) = (6{,}6 - 0{,}8\,x)e^{-0,2\,x}$.

   b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[2;15]$, puis dresser le tableau de variations de f.

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 15].
   Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

   b. Donner une interprétation au résultat trouvé précédemment

4. Pour quelle quantité extraite le résultat d'exploitation est-il maximum ?

Exercice 5 **- 3,5 points -**

Résoudre, après avoir précisé leurs ensembles de définition, chaque équation ou inéquation proposée :

1. $e^{5-x} = 4\,e^{2x}$

2. $\ln(x) = 6$

3. $(2x - 1)(\ln(x) + 3) = 0$

4. $-3\ln(x) \geq 6$

T ES/L — CORRECTION DEVOIR SURVEILLE° 3 — 16 / 01 / 2015

<u>Exercice 1</u> - 7 points 7+1 (BONUS) points - Centre étrangers 2010

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi.
Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS.
Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.
On considère les évènements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».
W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

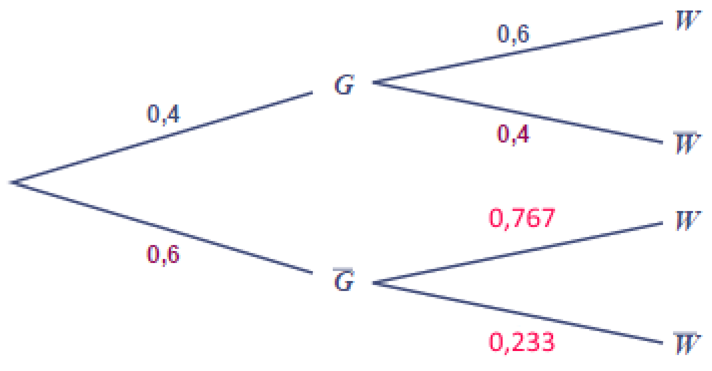
1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.

Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS
d'où $p(G) = 0{,}4$ et $p(\bar{G}) = 1 - p(G) = 0{,}6$.

Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi
d'où $p_G(W) = 0{,}6$ et $pG(\bar{\bar{W}}) = 1 - p_G(W) = 0{,}4$

Nous avons donc $p(G) = 0{,}4$, $p(\bar{G}) = 0{,}6$, $p_G(W) = 0{,}6$ et $p_G(\bar{W}) = 0{,}4$

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.



3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».

<u>On cherche</u> $p(G \cap W)$
<u>Alors</u> $p(G \cap W) = p_G(W) \times p(G) = 0{,}6 \times 0{,}4 = 0{,}24$
La probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options» est égale à 0,24.

4. On suppose que la probabilité de W est : $p(W) = 0,7$.

a) Démontrer que : $p(W \cap \bar{G}) = 0,46$.

Les évènements G et $\bar{G}$ déterminent une partition de l'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire,
<u>D'après</u> la formule des probabilités totales
<u>Alors</u> $p(W) = p(G \cap W) + p(\bar{G} \cap W)$
$0{,}7 = 0{,}24 + p(\bar{G} \cap W)$
$p(\bar{G} \cap W) = 0{,}7 - 0{,}24 = 0{,}46$

<u>Donc</u> $p(\bar{G} \cap W) = 0{,}46$

b) Démontrer que $p_{\bar{G}}(W) \approx 0,767$. Compléter l'arbre du 2.

On sait que $p(\bar{G} \cap W) = 0{,}46$

Alors $p_{\bar{G}}(W) = \frac{p(\bar{G} \cap W)}{p(\bar{G})} = \frac{0{,}46}{0{,}6} \approx 0{,}767$

Donc $p_{\bar{G}}(W) \approx 0{,}767$

5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

On cherche $p_W(\bar{G})$

Alors $p_W(\bar{G}) = \frac{p(\bar{G} \cap W)}{p(W)} = \frac{0{,}46}{0{,}7} \approx 0{,}657$

Parmi les téléphones avec l'option Wifi, la probabilité de prendre un téléphone qui ne possède pas l'option GPS est environ égale à 0,657

Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

6. On appelle X la variable aléatoire égale au coût de revient de ces deux options. Déterminer la loi de probabilité de X en complétant ce tableau, sans justifier et sans détailler les calculs.
Arrondir les probabilités au centième près.

Le téléphone possède les deux options , le coût de revient de l'option est de 18 €
et $p(G \cap W) = 0{,}24$

Le téléphone possède l'option GPS, le coût de revient de l'option est de 12 € et
et $p(G \cap \bar{W}) = p_G(\bar{W}) \times p(G) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

Le téléphone possède l'option Wifi, le coût de revient de l'option est de 6 €
et $p(\bar{G} \cap W) = 0{,}46$

Le téléphone ne possède aucune des deux options, le coût de revient de l'option est nul
et $p(\bar{G} \cap \bar{W}) = p_{\bar{G}}(\bar{W}) \times p(\bar{G}) \approx 0{,}233 \times 0{,}6 \approx 0{,}14$

Évènement	$\bar{G} \cap \bar{W}$	$\bar{G} \cap W$	$G \cap \bar{W}$	$G \cap W$
Coût de revient des 2 options	0	6	12	18
Probabilité	0,14	0,46	0,16	0,24

7. Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter ce résultat.

L'espérance mathématique du coût de revient de l'option est :
$E(X) = 0 \times 0{,}14 + 6 \times 0{,}46 + 12 \times 0{,}16 + 18 \times 0{,}24 = 9$
Le coût de revient moyen par téléphone d'une option est de 9 euros.

Exercice 2 **- 7 points -**

Partie A : Etude d'une suite

Soit (un) la suite définie par $u_0 = 100$ et pour tout nombre entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,8\, u_n + 3$$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 15$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

On a
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 15 \\ &= 0{,}8\, u_n + 3 - 15 \\ &= 0{,}8\, u_n - 12 \\ &= 0{,}8\left(u_n - \frac{12}{0{,}8}\right) \\ &= 0{,}8(u_n - 15) \\ &= 0{,}8\, v_n \end{aligned}$$

Et $v_0 = u_0 - 15 = 100 - 15 = 85$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,8 et de premier terme $v_0 = 85$

b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n

Comme (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 et $v_0 = 85$

Alors $v_n = v_0 \times q^n$

Donc $v_n = 85 \times 0{,}8^n$

c. Justifier que $u_n = 85 \times 0,8^n + 15$.

Comme $v_n = u_n - 15$ alors $u_n = v_n + 15$

Et $v_n = 85 \times 0{,}8^n$

Donc $u_n = 85 \times 0{,}8^n + 15$

2. Déterminer le sens de variation de (u_n).

On sait que $u_n = 85 \times 0{,}8^n + 15$

Comme la suite $(0{,}8^n)$ est décroissante car $0{,}8 < 1$

Alors la suite $(85 \times 0{,}8^n)$ est décroissante car $85 > 0$

Donc la suite $(85 \times 0{,}8^n + 15)$ est décroissante

D'où la suite (u_n) est décroissante

3. Déterminer (par la méthode de votre choix) le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 16$.

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 16$.

Première méthode :

On peut faire un tableau de valeurs de Y = 15 + 85 ×0.8^X à la calculatrice :

Le plus petit entier n tel que $u_n < 16$ est donc $n = 20$

Seconde méthode :

On peut utiliser le logarithme pour résoudre l'inéquation

$$u_n < 16$$
$$85 \times 0{,}8^n + 15 < 16$$
$$85 \times 0{,}8^n < 16 - 15$$
$$85 \times 0{,}8^n < 1$$
$$0{,}8^n < \frac{1}{85}$$
$$\ln(0{,}8^n) < \ln(\frac{1}{85})$$

$$n\ln(0{,}8) < \ln\left(\frac{1}{85}\right)$$

$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{85}\right)}{\ln(0{,}8)} \qquad \text{car } \ln(0{,}8) < 0 \quad \text{car } 0{,}8 < 1$$

$$n > 19{,}91$$

D'où n égal au minimum à 20.

Partie B : Une situation concrète

En 2000, un pays comptait environ 100 milliers d'hectares de forêt. On estime que, chaque décennie, 20% de cette couverture forestière disparaît. Afin de lutter contre ce fléau, chaque décennie, une organisation plante des arbres sur 3 milliers d'hectares.

1. Combien d'hectares y aura-t-il : a) en 2010 ? b) en 2020 ?

a) en 2010 il y aura 83 milliers d'hectares

car 100 – 20% de 100 + 3 (replantés) = 83

b) en 2020 il y aura 69,4 milliers d'hectares

car 83 – 20% de 83 + 3 = 80×0.8 +3 = 69,4

2. On admet que la suite (u_n) définie en partie A modélise cette situation. L'action de l'organisation est-elle suffisante pour retrouver dans quelques décennies la couverture forestière de 2000 ?

Si on admet que la suite (un) définie en partie A modélise cette situation comme on a vu que la suite est décroissante, on voit que l'action de l'organisation ne sera pas suffisante pour retrouver dans quelques décennies la couverture forestière de 2000.

3. Recopier sur votre copie et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle la couverture forestière sera inférieure à 16000 hectares.

```
Stocker 0 dans N et 100 dans U
Tant que U > ou = 16 faire
    Stocker N+1 dans N
    Stocker U *0.8+3  dans U
Fin tant que
Afficher N .
```

Exercice 3 **- 5 points -**

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse. Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 point. Une réponse fausse non justifiée enlève 0,5 point.

On considère la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = x\,e^{-x}$.

Q1 - On note f' la fonction dérivée de la fonction . Pour tout réel x on a :

a) $f'(x) = e^{-x}$ **b)** $f'(x) = (1+x)\,e^{-x}$ **c)** $f'(x) = (1-x)\,e^{-x}$

On a $f(x) = x\,e^{-x}$
Alors f dérivable comme produit de fonctions dérivables

D'où $f = u \times v$ avec $u(x) = x$ $u'(x) = 1$
$v(x) = e^{-x}$ $v'(x) = -\,e^{-x}$

Et $f' = u'v + v'u$

Donc $f'(x) = 1\,e^{-x} + (-\,e^{-x}) \times x$ = $(1-x)\,e^{-x}$ = $(4 - 0{,}8\,x + 2{,}6)\,e^{-0{,}2x}$
$f'(x) = (1-\,x)\,e^{-x}$

Réponse : c)

Q2 - La valeur exacte de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ est :

a) $-\frac{1}{2}\sqrt{e}$ **b)** $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ **c)** $0,303$

On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$

Réponse : b)

Q3 - La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = 0$ **b)** $y = -x$ **c)** $y = x$

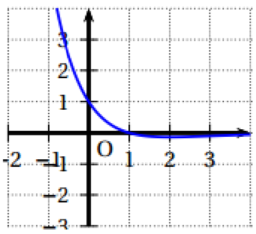
Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse zéro est :
$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$
où $f'(0) = (1-0)e^0 = 1 \times 1 = 1$ et $f(0) = 0 \times e^0 = 0$

Donc une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse zéro est : $y = x$

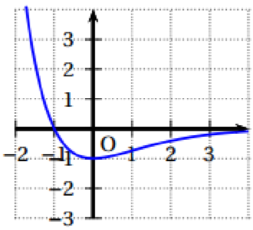
Réponse : c)

Q4 - Une des trois courbes est la représentation graphique d'une fonction g telle que $g' = f$. Laquelle ?

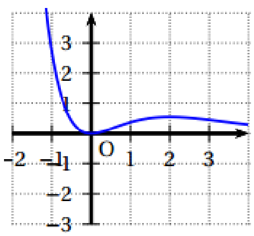
a)



b)



c)



On sait que $f(x) = xe^{-x}$
Comme pour tout x, $e^{-x} > 0$
Donc $f(x)$ est du signe de x
Donc si $x > 0$ alors $f(x) > 0$ $g'(x) > 0$ donc g est croissante sur $]0;+\infty[$
si $x < 0$ alors $f(x) < 0$ $g'(x) < 0$ donc g est décroissante sur $]-\infty;0[$

Réponse :b)

Q5 - On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[-6;6]$ par : $h(x) = exp[f(x)] = e^{f(x)}$.
On peut affirmer que :

a) la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $[-6;6]$
b) la fonction h a les variations inverses de celles de f sur l'intervalle $[-6;6]$
c) la fonction h a les mêmes variations que f sur l'intervalle $[-6;6]$

La fonction exponentielle est strictement croissante donc les fonctions *u* et eu ont les mêmes variations sur tout intervalle où *u* est définie.

Réponse :c)

Exercice 4 - 7,5 points -

Une entreprise peut extraire entre 2000 et 15 000 tonnes de minerai d'une carrière.
Le résultat d'exploitation qu'elle envisage, en millions d'euros, est donné par :

$$f(x) = (4x - 13)e^{-0,2\,x}$$

où x est la quantité de minerai extraite en milliers de tonnes, $x \in [2;15]$.

1. a. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$ sur $[2;15]$

On a $f(x) = (4x - 13)e^{-0,2\,x}$
Alors $f(x) > 0$
$(4x - 13)e^{-0,2\,x} > 0$
$4x - 13 > 0$ car pour tout x, $e^{-0,2\,x} > 0$
$4x > 13$
$x > \frac{13}{4}$
$x > 3,25$
Donc $S =]3,25;15]$

b. Interpréter économiquement le résultat.

Cela signifie que le résultat d'exploitation est positif lorsque l'entreprise extrait entre 3250 et 15000 tonnes de minerai.

2. a. Montrer que $f'(x) = (6,6 - 0,8\,x)e^{-0,2\,x}$.

On a $f(x) = (4x - 13)e^{-0,2\,x}$
Alors f dérivable sur $[0;15]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[0;15]$

D'où $f = u \times v$ avec $u(x) = 4x - 13$ $u'(x) = 4$
$v(x) = e^{-0,2x}$ $v'^{(x)} = -0,2\,e^{-0,2\,x}$

Et $f' = u'v + v'u$

Donc $f'(x) = 4\,e^{-0,2x} + (-0,2\,e^{-0,2x}) \times (4x - 13)$
$f'(x) = (4 - 0,2(4x - 13))\,e^{-0,2x}$
$f'(x) = (4 - 0,8\,x + 2,6)\,e^{-0,2x}$
$f'(x) = (6,6 - 0,8\,x)\,e^{-0,2x}$

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $[2;15]$, puis dresser le tableau de variations de f.

On a $f'(x) = (6,6 - 0,8\,x)\,e^{-0,2x}$
Comme pour tout x, $e^{-0,2\,x} > 0$
Alors $f'(x)$ est du signe de $6,6 - 0,8\,x$

Donc $f'(x) > 0$ $6,6 - 0,8\,x > 0$ $6,6 > 0,8\,x$ $\frac{6,6}{0,8} > x$ $8,25 > x$
$f'(x) < 0$ $8,25 < x$

x	2		8.25		15
signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variation de f	≈-3.35	↗	≈3.84	↘	≈2.34

3. a. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans l'intervalle [2 ; 15]. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

• On calcule $f(2) = (4 \times 2 - 13)e^{-0,2\times2} = -5e^{-0,4} \approx -3,35 < 1$
$f(8,25) = (4 \times 8,25 - 13)e^{-0,2\times8,25} = 20\ e^{-1,65} \approx 3,84 > 1$

On sait que f est dérivable donc continue sur [2 ;8,25]
f est strictement croissante sur [2 ;8,25]
$f(2) < 1 < f(8,25)$
D'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique α sur [2 ;8,25]

• On calcule $f(8,25) \approx 3,84 > 1$
$f(15) = (4 \times 15 - 13)e^{-0,2\times15} = 47\ e^{-3} \approx 2,34 > 0$

On sait que f est dérivable donc continue sur [2 ;8,25]
f est strictement croissante sur [2 ;8,25]
$f(2) < 0 < f(8,25)$
Donc l'équation $f(x) = 1$ n'admet pas de solution sur [8,25 ;15]

Conclusion : l'équation $f(x) = 1$ admet une unique α sur [2 ;15]

À l'aide de la calculatrice, on obtient des encadrements successifs de α

$f(3) \approx -0,5488$	et	$f(4) \approx 1,348$	Donc 3 < α <4
$f(3,7) \approx 0,8588$	et	$f(3,8) \approx 1,0289$	Donc 3,7 < α < 3,8
$f(3,78) \approx 0,9954$	et	$f(3,79) \approx 1,0122$	Donc 3,78 < α < 3,79
$f(3,782) \approx 0,9988$	et	$f(3,783) \approx 1,0005$	Donc 3,782 < α < 3,783

Ainsi, sur l'intervalle [2 ;15], l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α avec $\boldsymbol{\alpha \approx 3,783}$.

b. Donner une interprétation au résultat trouvé précédemment

On sait que $f(x) = 1$ pour $\alpha \approx 3,783$
Donc le résultat d'exploitation est d'un million d'euro pour production de 3783 tonnes de minerai.

4. Pour quelle quantité extraite le résultat d'exploitation est-il maximum ?

D'après les variations, la fonction f admet un maximum d'environ 3,84 pour $x = 8,25$.
Donc le résultat d'exploitation est maximum pour production de 8250 tonnes de minerai.

Exercice 5 - 3,5 points -

Résoudre, après avoir précisé leurs ensembles de définition chaque équation ou inéquation proposée :

1. $\boldsymbol{e^{5-x} = 4\, e^{2x}}$

Ensemble de définition : $\mathbb{R}$

Résolution :

$$e^{5-x} = 4\, e^{2x}$$
$$\frac{e^{5-x}}{e^{2x}} = 4$$
$$e^{5-x-2x} = 4$$
$$e^{5-3x} = 4$$
$$e^{5-3x} = e^{\ln(4)}$$
$$5 - 3x = \ln(4)$$
$$x = \frac{\ln(4)\ - 5}{-3} = \frac{5 - \ln(4)}{3}$$

Conclusion : $S = \left\{\frac{5-\ln(4)}{3}\right\}$

2. $\boldsymbol{\ln(x) = 6}$

Ensemble de définition : $]0; +\infty[$

Résolution :

$$\ln(x) = 6$$
$$\ln(x) = \ln(e^6)$$
$$x = e^6$$

Conclusion : $S = \{e^6\}$

3. $\boldsymbol{(2x-1)(\,\ln(x) + 3\,) = 0}$

Ensemble de définition : $]0; +\infty[$

Résolution :

$$(2x-1)(\,\ln(x) + 3\,) = 0$$

Or un produit de facteur est nul si l'un des facteurs est nul

Alors soit $2x - 1 = 0$ soit $\ln(x) + 3 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$\ln(x) = -3$

$e^{\ln(x)} = e^{-3}$

$x = e^{-3}$

Conclusion : $S = \left\{\frac{1}{2}; e^{-3}\right\}$

4. $\boldsymbol{-3\ln(x) \geq 6}$

Ensemble de définition : $]0; +\infty[$

Résolution :

$$-3\ln(x) \geq 6$$
$$\ln(x) \leq \frac{6}{-3}$$
$$\ln(x) \leq -2$$
$$e\hat{}(\ln(x)) \leq e^{-2}$$
$$x \leq e^{-2}$$

Conclusion : $S =]0; e^{-2}]$