

DS 6 – 18 MAI 2017

Durée : 2h**Avec Calculatrice****NOM :****Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.

Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6
/ 30	/ 5	/ 7	/ 2	/ 4+1	/ 7	/ 6

Rappel : tous les résultats seront à justifier sauf avis contraire

Exercice 1 - 5 points -

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

Soit le jeu suivant :

- on gagne 14 euros si le numéro sorti est 1 ou un 2 ;
- et 7 euros si c'est un 3 ;
- on perd 100 euro si c'est un 4.

On définit alors la variable aléatoire X sur l'univers Ω qui correspond au gain (ou perte) du joueur.

1. Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .
2. Décrire par une phrase l'évènement « $X = +7$ » et calculer sa probabilité.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
4. Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +7$ » et calculer sa probabilité.
5. Donner l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 2 - 7 points -

Bernard et Bianca visitent une usine de chocolat en Suisse. A la sortie de la visite, ils peuvent manger des truffes. Les trois quarts des truffes offertes sont au chocolat noir, à forte teneur en cacao, les autres sont au praliné. Il y en a suffisamment pour que la probabilité de prendre une truffe au chocolat noir reste toujours égale à 0,75.

1. Un visiteur choisit 5 truffes et les mange une à une. On note X la variable aléatoire égale au nombre de truffes au chocolat noir choisies.
 - a) Reconnaître la loi suivie par X et donner ses paramètres. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X .
 - b) Donner les probabilités exactes (avec les formules) puis à 10^{-4} près de $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. Dresser le tableau de la loi de probabilité suivie par X .
 - c) Calculer $p(X \geq 3)$; en donner une interprétation.
 - d) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter.

2.
 - a) Bianca préfère les truffes au praliné. Elle prend (et mange !) 10 truffes et se plaint : "Toutes les truffes sont au chocolat noir !" Quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?
 - b) Bernard choisit 6 truffes, mais il est malade le lendemain si il mange au moins 4 truffes au praliné. Quelle est la probabilité que Bernard tombe malade ?

Exercice 3 - 2 points -

Dans un article, un journaliste affirme que 42% des jeunes qui aiment la lecture préfèrent lire le soir. On interroge au hasard 140 jeunes qui aiment lire et on assimile le sondage à un tirage successif avec remise : on observe que 49 jeunes déclarent lire le soir.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jeunes préférant lire le soir ; donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X .

2. A l'aide de la table des probabilités cumulées de X ci-dessous, donner le plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$. (justifier)

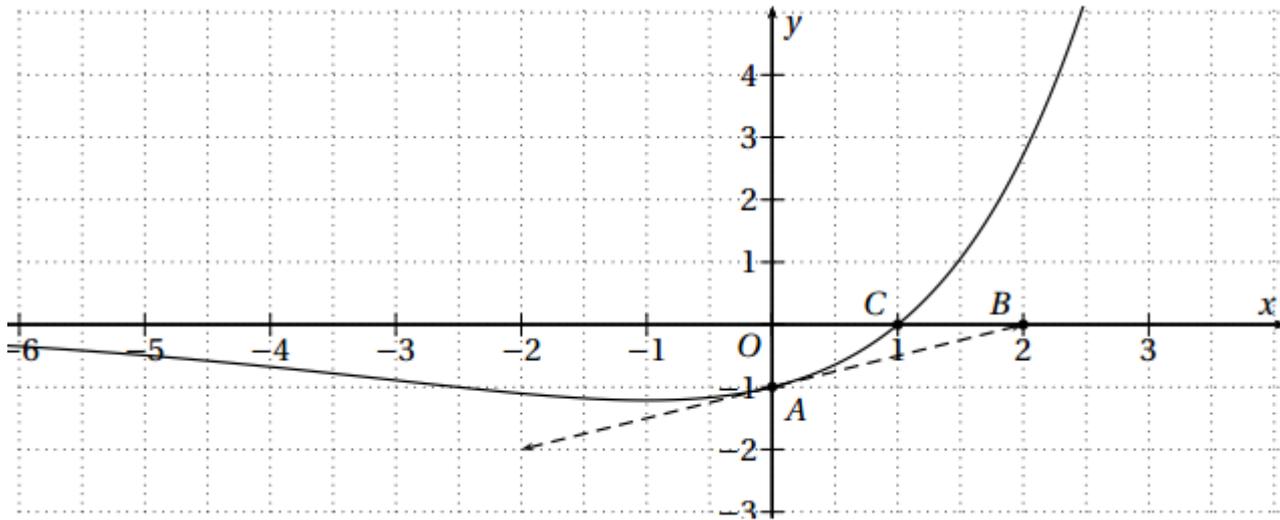
k	$P(X \leq k)$	k	$p(X \leq k)$
45	0,01063016	68	0,95101974
46	0,01670959	69	0,96593834
47	0,02551429	70	0,9768958
48	0,03786744	71	0,98471875

Exercice 4 - 4 + 1 points -

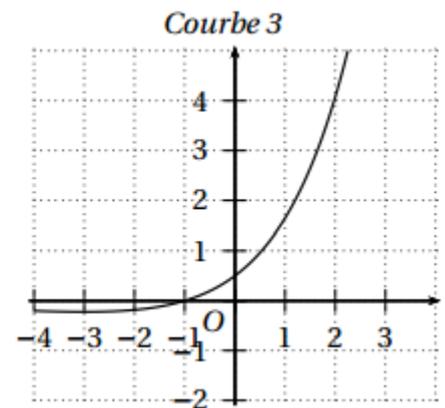
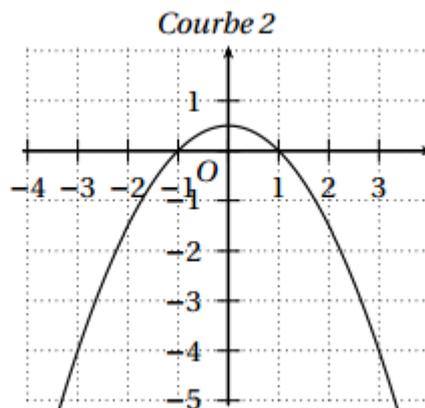
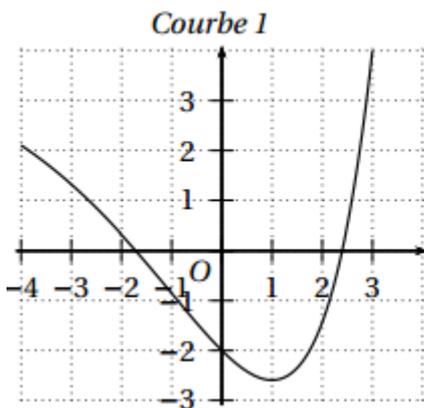
Dans le repère ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

La courbe passe par les points $A(0; -1)$ et $C(1; 0)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en A passe par le point $B(2; 0)$.



1. Sans justifier déterminer $f(0)$ et $f(1)$.
2. En justifiant déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.



3. Une des courbes ci-dessus représente la fonction dérivée f' de f . Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.
4. Une des courbes ci-dessus représente une fonction g telle que $g' = f$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques. (BONUS)

Exercice 5 - 7 points -

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.
2. Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f en y indiquant les valeurs exactes des extremums locaux.
3. Déterminer les abscisses des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à l'axe d'abscisses.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 6 - 6 points - Comparaison de suites

En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Malthus avait émis l'hypothèse suivante :

- La population de l'Angleterre augmente de 2% par an ;
- L'agriculture anglaise, en 1800, permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 400 000 habitants supplémentaires par an.

1. Quelle est la nature des suites (P_n) et (A_n) qui donnent respectivement la population et le nombre de personnes que l'agriculture peut nourrir l'année $1800 + n$ en millions d'habitants ?

Justifiez votre réponse et donner P_n et A_n en fonction de n .

2. Calculer la population de l'Angleterre en 1900 et le nombre d'habitants que pouvait nourrir l'agriculture anglaise cette même année.

3. Compléter l'algorithme afin de déterminer l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population de l'Angleterre, suivant la théorie de Malthus.

Variables	P, A, N
Traitement	P prend la valeur 8 A prend la valeur 10 N prend la valeur 0 Tant que Affecter $P \times 1,02$ à P Affecter à A Affecter à N Fin du Tant que
Sortie	Afficher

En s'aidant du résultat de l'algorithme, répondre à la question.

Exercice 1 - 5 points -

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

- Soit le jeu suivant :
- on gagne 14 euros si le numéro sorti est 1 ou un 2 ;
 - et 7 euros si c'est un 3 ;
 - on perd 100 euro si c'est un 4.

On définit alors la variable aléatoire X sur l'univers Ω qui correspond au gain (ou perte) du joueur.

1. Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

On définit alors la variable aléatoire X sur Ω qui correspond au gain (ou perte).

- La variable aléatoire X associe :
- 14 à l'issue des événements élémentaires {1} et {2} ;
 - 7 à l'issue ou événement élémentaire {3} ;
 - et -100 à l'issue ou événement élémentaire {4} .

L'ensemble des valeurs prises par X est donc $\{-100 ; 7 ; 14\}$ et l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

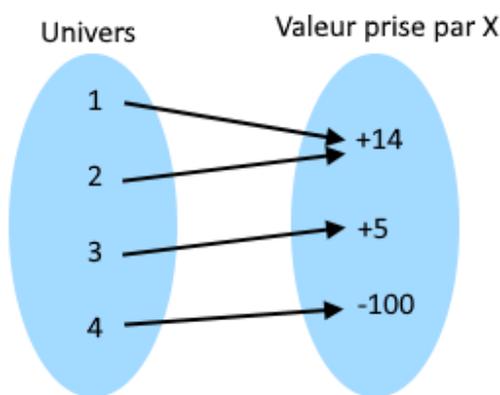
2. Décrire par une phrase l'évènement « $X = +7$ » et calculer sa probabilité.

• L'évènement « $X = +7$ » est l'évènement : « le joueur a gagné 7 euro », il correspond donc à l'évènement élémentaire {3}.

• Il y a 3 boules qui portent le n° 3 sur un total de 8 boules d'où $P(X = 7) = p_3 = \frac{3}{8} = 0,375$

Donc la probabilité de gagner 7€ est de 0,375

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .



Il y a deux boules n°1 sur les 8 boules $p_1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Il y a deux boules n°2 sur les 8 boules $p_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Il y a trois boules n°3 sur les 8 boules $p_3 = \frac{3}{8}$

Il y a une boule n°4 sur les 8 boules $p_4 = \frac{1}{8}$

Alors $p(X = 14) = p_1 + p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$

$p(X = 7) = p_3 = \frac{3}{8} = 0,375$

$p(X = -100) = p_4 = \frac{1}{8} = 0,125$

La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

x_i	-100	7	14	Total
$P(X = x_i)$	0,125	0,375	0,5	1

4. Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +7$ » et calculer sa probabilité.

L'évènement « $X \geq +7$ » est l'évènement : « le joueur a gagné 7 euro ou plus », il correspond donc à l'évènement {1 ; 2 ; 3}.

Donc $P(X \geq 7) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,25 + 0,25 + 0,375 = 0,875$

D'où la probabilité de gagner plus de 7€ est de 0,875

5. Donner l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

L'espérance est : $E(X) = -100 \times 0,125 + 7 \times 0,375 + 14 \times 0,5 = -2,875$

Cela signifie que le gain moyen au jeu est une perte de 2,875 euros.

Le jeu n'est pas équitable et il est préférable de ne pas jouer.

Exercice 2 - 7 points -

Bernard et Bianca visitent une usine de chocolat en Suisse. A la sortie de la visite, ils peuvent manger des truffes. Les trois quarts des truffes offertes sont au chocolat noir, à forte teneur en cacao, les autres sont au praliné. Il y en a suffisamment pour que la probabilité de prendre une truffe au chocolat noir reste toujours égale à 0,75.

1. Un visiteur choisit 5 truffes et les mange une à une. On note X la variable aléatoire égale au nombre de truffes au chocolat noir choisies.

a) Reconnaître la loi suivie par X et donner ses paramètres. Préciser l'ensemble des valeurs prises par X .

On répète 5 fois la même expérience de Bernoulli de façon indépendante « choisir une truffe » avec 2 issues possibles :

S : « la truffe est au chocolat »

\bar{S} : « la truffe est au praliné »

Avec $p(S) = 0,75 = \frac{3}{4}$ et $p(\bar{S}) = 0,25 = \frac{1}{4}$

La variable aléatoire X suit la binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,75$

b) Donner les probabilités exactes (avec les formules) puis à 10^{-4} près de $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. Dresser le tableau de la loi de probabilité suivie par X .

On sait que $p(X = k) = \binom{5}{k} p^k (1 - p)^{5-k}$

$$p(X = 0) = \binom{5}{0} p^0 (1 - p)^{5-0} = \binom{5}{0} \times 0,75^0 \times 0,25^5 = \frac{1}{1024} \approx 0,0010$$

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1 - p)^{5-2} = \binom{5}{2} \times 0,75^2 \times 0,25^3 = \frac{90}{1024} \approx 0,0879$$

D'où

Valeur de $X : x_i$	0	1	2	3	4	5
Probabilité $P(X = x_i)$	0,0010	0,0146	0,0879	0,2637	0,3955	0,2373

c) Calculer $p(X \geq 3)$; en donner une interprétation.

On cherche $P(X \geq 3)$

Alors $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{918}{1024} \approx 0,8965$

Donc la probabilité que le visiteur tombe sur au moins 3 truffes au chocolat sur les 5 choisies est d'environ de 0,8965.

d) Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter.

On sait que $E(X) = n \times p = 5 \times 0,75 = 3,75$

Donc pour un très grand nombre de visiteurs, on peut espérer que chacun ait en moyenne 4 truffes au chocolat.

2. a) Bianca préfère les truffes au praliné. Elle prend (et mange !) 10 truffes et se plaint : "Toutes les truffes sont au chocolat noir !" Quelle est la probabilité que cet événement se réalise ?

L'expérience est répétée 10

Alors on travaille alors avec une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,75$

D'où $p(X = 10) = \binom{10}{10} p^{10} (1 - p)^{10-10} = \binom{10}{10} \times 0,75^{10} \times 0,25^0 \approx 0,0563$

Donc la probabilité que toutes les truffes soient au chocolat est de 0,0563

b) Bernard choisit 6 truffes, mais il est malade le lendemain si il mange au moins 4 truffes au praliné. Quelle est la probabilité que Bernard tombe malade ?

L'expérience est répétée 6

Alors on travaille alors avec une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,75$

On cherche à calculer $P(X \leq 2)$

A l'aide de la calculatrice, on trouve $P(X \leq 2) \approx 0,0376$

Donc la probabilité que Bernard tombe malade est de 0,0376

Exercice 3 - 2 points -

Dans un article, un journaliste affirme que 42% des jeunes qui aiment la lecture préfèrent lire le soir.

On interroge au hasard 140 jeunes qui aiment lire et on assimile le sondage à un tirage successif avec remise : on observe que 49 jeunes déclarent lire le soir.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jeunes préférant lire le soir ; donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X .

On sait que X la variable aléatoire est égale au nombre de jeunes préférant lire le soir

Comme les 140 tirages sont indépendants et il y a que deux issues possibles : lire ($p = 0,42$) ou non le soir

Donc la variable aléatoire X suit la binomiale de paramètres $n = 140$ et $p = 0,42$

2. A l'aide de la table des probabilités cumulées de X ci-dessous, donner le plus petit entier a tel que $p(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $p(X \leq b) \geq 0,975$. (justifier)

k	$P(X \leq k)$	k	$p(X \leq k)$
45	0,01063016	68	0,95101974
46	0,01670959	69	0,96593834
47	0,02551429	70	0,9768958
48	0,03786744	71	0,98471875

On remarque que : • $P(X \leq 46) \approx 0,0167 < 0,025$ et $P(X \leq 47) \approx 0,0255 > 0,025$

Donc $a = 47$

• $P(X \leq 69) \approx 0,966 < 0,975$ et $P(X \leq 70) \approx 0,977 > 0,975$

Donc $b = 70$

Pour info...

3. La taille de l'échantillon est $n = 140$; déterminer l'intervalle I de fluctuation à 95% de la fréquence correspondant à X .

Comme on a trouvé $a = 47$ et $b = 70$

On a alors $\frac{47}{140} \approx 0,34$ et $\frac{70}{140} = 0,5$

Donc l'intervalle de fluctuation à 95% est $I = [0,34; 0,5]$

4. Quelle est la fréquence f observée ?

Lors de l'enquête sur les 140 jeunes, 49 disent lire le soir

Donc $f = \frac{49}{140} = 0,35$ est la fréquence observée

5. Peut-on mettre en doute, au seuil de 5%, l'affirmation du journaliste ?

On sait que • l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % $I = [0,34; 0,5]$

• la fréquence observée $f = 0,35$

Comme $f \in [0,34; 0,5]$

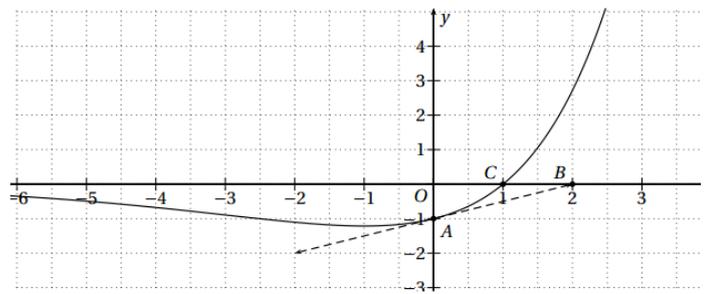
Donc on ne peut pas mettre en doute l'affirmation du journaliste au seuil de 5%

Exercice 4 - 4 + 1 points -

Dans le repère ci-dessous, on donne la courbe représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

La courbe passe par les points $A(0; -1)$ et $C(1; 0)$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses et la tangente à la courbe en A passe par le point $B(2; 0)$.



1. Sans justifier déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

On a $f(0) = -1$ et $f(1) = 0$

2. En justifiant déterminer $f'(-1)$ et $f'(0)$.

On cherche $f'(-1)$

On détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1

Comme la tangente est horizontale

Donc $f'(-1) = 0$

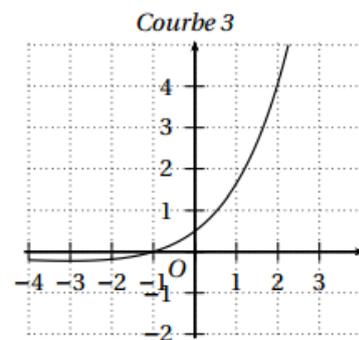
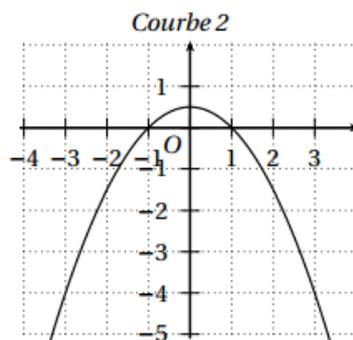
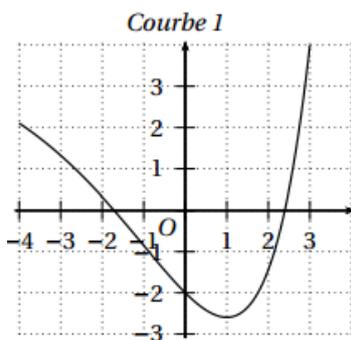
On cherche $f'(0)$

On détermine le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0

Comme la tangente passe par les points $A(0; -1)$ et $B(2; 0)$

Alors $f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{2 - 0} = \frac{1}{2} = 0,5$

Donc $f'(0) = 0,5$



3. Une des courbes ci-dessus représente la fonction dérivée f' de f . Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques.

D'après les variations de la fonction f

On trouve que sa fonction dérivée doit être négative sur $] -\infty; -1]$ puis positive sur $[-1; +\infty[$

Donc la courbe 3 correspond à ces critères

D'où la courbe 3 correspond à la courbe représentative de la fonction f'

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	↘ ↗ $-1, 2$		
$f'(x)$	-	0	+

4. Une des courbes ci-dessus représente une fonction g telle que $g' = f$. Déterminer laquelle en justifiant votre choix à l'aide d'arguments graphiques. (BONUS)

On cherche une fonction g qui en la dérivant donnerait la fonction f

D'après le signe de la fonction f va informer sur les variations de la fonction g

On trouve que la fonction g doit être décroissante sur $] -\infty; 1]$ puis croissante sur $[1; +\infty[$

Donc la courbe 1 correspond à ces critères

D'où la courbe 1 correspond à la courbe représentative de la fonction g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) = g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘ ↗		

Exercice 5 - 7 points -

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ sur $\mathbb{R} - \{1\}$.

On a $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Comme f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables

D'où $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - x + 1$ $u'(x) = 2x - 1$
 $v(x) = x - 1$ $v'(x) = 1$

Alors $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x - 1) \times (x - 1) - 1 \times (x^2 - x + 1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

2. Etudier les variations de f et dresser le tableau des variations de f en y indiquant les valeurs exactes des extremums locaux.

On a $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Comme pour tout réel x , $(x - 1)^2 > 0$

Donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x$

Or $x^2 - 2x = x(x - 2)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x	-	0	+	+	
$x - 2$	-	-	0	+	
$x(x - 2)$	+	0	-	0	+

D'où

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	↗ -1 ↘		↘ 3 ↗			

$f(0) = \frac{0^2 - 0 + 1}{0 - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

et

$f(2) = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 1} = \frac{4 - 2 + 1}{1} = 3$

3. Déterminer les abscisses des points de la courbe C_f où la tangente est parallèle à l'axe d'abscisses.

On cherche les valeurs de x tel que $f'(x) = 0$

D'après la question précédente, on trouve 0 et 2

Donc la fonction f admet deux tangentes horizontales en 0 et en 2

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 3.

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est : $y = f'(3) \times (x - 3) + f(3)$

Avec $f(3) = \frac{3^2 - 3 + 1}{3 - 1} = \frac{9 - 2}{2} = \frac{7}{2}$

$f'(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3}{(3 - 1)^2} = \frac{9 - 6}{2^2} = \frac{3}{4}$

D'où $y = \frac{3}{4} \times (x - 3) + \frac{7}{2}$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} + \frac{7}{2}$

$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4} + \frac{14}{4}$

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

La tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 3 a pour équation $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.

Exercice 6 - 6 points - Comparaison de suites

En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Malthus avait émis l'hypothèse suivante :

- La population de l'Angleterre augmente de 2% par an ;
- L'agriculture anglaise, en 1800, permet de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permet de nourrir 400 000 habitants supplémentaires par an.

1. Quelle est la nature des suites (P_n) et (A_n) qui donnent respectivement la population et le nombre de personnes que l'agriculture peut nourrir l'année $1800 + n$ en millions d'habitants ?

Justifiez votre réponse et donner P_n et A_n en fonction de n .

• En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants. Chaque année la population de l'Angleterre s'accroît de 2%, donc elle est multipliée par 1,02.

Si P_n est la population l'année $1800 + n$, l'année suivante elle sera de $P_{n+1} = 1,02 P_n$.

La suite (P_n) est une suite géométrique de raison 1,02 et de premier terme 8 en millions d'habitants.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P_n = 8 \times 1,02^n$

• L'agriculture anglaise permettait de nourrir 10 millions d'habitants. Chaque année l'amélioration de l'agriculture permet de nourrir 400 000 personnes supplémentaires.

Si A_n est le nombre de personne pouvant être nourries l'année $1800 + n$, l'année suivante elle est augmentée de 0,4 million donc $A_{n+1} = A_n + 0,4$

La suite (A_n) est une suite arithmétique de raison 0,4 et de premier terme 10 en millions.

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$ $A_n = 10 + 0,4 n$

2. Calculer la population de l'Angleterre en 1900 et le nombre d'habitants que pouvait nourrir l'agriculture anglaise cette même année.

• $P_{100} = 8 \times 1,02^{100} \approx 58$

• $A_{100} = 10 + 0,4 \times 100 = 50$

Donc en 1900, on estime environ 58 millions d'habitants et une agriculture qui permet de nourrir 50 millions d'habitants

3. Compléter l'algorithme afin de déterminer l'année à partir de laquelle l'agriculture anglaise ne permet plus de nourrir la population de l'Angleterre, suivant la théorie de Malthus.

Variables	P, A, N
Traitement	P prend la valeur 8 A prend la valeur 10 N prend la valeur 0 Tant que $A > P$ Affecter $P \times 1,02$ à P Affecter $A + 0,4$ à A Affecter $N + 1$ à N Fin du Tant que
Sortie	Afficher N

En s'aidant du résultat de l'algorithme, répondre à la question.

En 1887 l'agriculture ne peut plus nourrir la population entière. Ce modèle n'est donc manifestement pas satisfaisant.