DS 5 – 23 MARS 2017

Durée : 2h **Avec Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
/ 40	/ 7	/ 8	/ 3	/ 9	/ 13

Rappel : tous les résultats seront à justifier sauf avis contraire

Exercice 1 - 7 points -

On considère une urne contenant une boule rouge, deux boules bleues, trois boules jaunes et quatre boules vertes.
Ces boules sont indiscernables au toucher. Un joueur tire, au hasard, une boule dans l'urne.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- R : « tirer une boule rouge »
- B : « tirer une boule bleue »
- J : « tirer une boule jaune »
- V : « tirer une boule verte »

2) En fonction de la couleur tirée, le joueur se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante :

- si la boule tirée est rouge, on gagne 15 €
- si la boule tirée est bleue ou jaune, on gagne 2 €
- si la boule tirée est verte, on perd 10€

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage, le « gain » réalisé par le joueur.

a) En déduire de la question 1, $P(X = 15)$, $P(X = 2)$ et $P(X = -10)$

b) Déterminer l'espérance mathématiques de X et en interpréter le résultat. Le jeu est-il équitable pour le joueur ?

3) maintenant, on gagne toujours 15€ si la boule tirée est rouge, et on perd toujours 10 € si la boule tirée est verte. Par contre, on gagne m si elle est bleue ou jaune, m désignant un réel positif.
Calculer m pour que le jeu soit équitable.

<u>Exercice 2</u> **- 8 points -**

Un magasin de déstockage STOCKAMI a reçu un lot important de jeans qui peuvent avoir deux types de défauts : un défaut de couleur ou un défaut de taille.

Il note aussi que :

- 4 % de ces jeans présentent un défaut de coloris,
- 3 % des jeans ont un problème de taille,
- 2 % des jeans ont à la fois un défaut de coloris et problème de taille.

On choisit au hasard un jeans dans le lot. On considère les événements suivants :

C : « Le jeans présente un défaut de coloris »,

T : « Le jeans a un problème de taille».

1. Compléter, sur l'annexe, le tableau à double entrée suivant :

Défaut T / Défaut C	Oui	Non	Total
Oui			
Non			
Total	3		100

2. A l'aide du tableau à double entrée, donner la probabilité des événements suivants :

D : « Le jeans présente au moins un défaut »,

E : « Le jeans présente un seul défaut »,

F : « Le jeans est sans défaut ».

Vous écrirez les évènements D, E et F en fonction des évènements C, $\bar{C}$, T *et* $\bar{T}$ *puis*

3. Le propriétaire du magasin vend un jeans sans défaut 40 euros, il fait une remise de 20 % si le jeans a un seul défaut, et de 50 % s'il a les deux défauts.

a. Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un jeans.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Quel chiffre d'affaires le propriétaire peut-il espérer faire sur la vente de cent jeans ?

Exercice 3 **- 3 points -**

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 115 \\ u_{n+1} = 0{,}4 \times u_n + 120 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul un algorithme permet de déterminer les termes de la suite (u_n), lequel ?

algorithme 1	**algorithme 2**	**algorithme 3**

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
 	
Début :
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
    Affecter $0{,}6 \times U + 120$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin
	Variables :
	U est un nombre réel
	i et N sont des nombres entiers
	
	Début :
	Saisir une valeur pour N
	Pour i de 1 à N faire
	    Affecter 115 à U
	    Affecter $0{,}4 \times U + 115$ à U
	Fin Pour
	Afficher U
	Fin
		Variables :
		U est un nombre réel
		i et N sont des nombres entiers
		
		Début :
		Saisir une valeur pour N
		Affecter 115 à U
		Pour i de 1 à N faire
		    Affecter $0{,}4 \times U + 120$ à U
		Fin Pour
		Afficher U
		Fin

Exercice 4 **- 7 points -**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$.
On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

4. La courbe représentative de f admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = 2n^3 + n^2 + n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Quel lien y a-t-il entre u_n, n et f ?

3. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

<u>Exercice 5</u> - 13 points -

Une agence de publicité est chargée d'assurer la promotion d'une nouvelle marque STOCKAMI.

Une enquête réalisée par cette agence montre que la fréquence $f(x)$ des personnes connaissant le nom de cette marque au bout de x semaines de publicité est donné par :

$$f(x) = \frac{3x}{3x+2}$$

1) a) Calculer $f(2)$.

b) En déduire le pourcentage de personnes qui ignorent le nom de cette marque après deux semaines de publicité.

c) Donner une interprétation simple du nombre $f(0)$.

Pour la suite de l'exercice, on supposera que $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0}; \mathbf{18}]$.

2) a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le sens de variations de f sur $[0; 18]$.

c) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de f en son point A au point d'abscisse $a = 1$.

d) Tracer, sur l'annexe, l'allure de C_f la courbe représentative de f sur $[0; 18]$ ainsi que la tangente T_1.
Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

3) a) Déterminer le nombre de semaines nécessaires pour que 90% de la population connaisse le nom STOCKAMI. Justifier.

b) Que peut-on prévoir sur la fréquence des personnes connaissant le nom de STOCKAMI au bout d'un très grand nombre de semaines ? On ne demande ici aucune justification.

ANNEXE : DS 5 – 23 MARS 2017

Durée : 2h **Avec Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
/ 40	/ 7	/ 8	/ 3	/ 9	/ 13

Exercice 2

Défaut T / Défaut C	Oui	Non	Total
Oui			
Non			
Total	3		100

Exercice 5

Tracer l'allure de C_f la courbe représentative de f sur $[0;18]$ ainsi que la tangente T_1.
Unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

DS 5 – 23 MARS 2017

Durée : 2h **Avec Calculatrice**

Rappel : tous les résultats seront à justifier sauf avis contraire

Exercice 1 **- 7 points -**

On considère une urne contenant une boule rouge, deux boules bleues, trois boules jaunes et quatre boules vertes.
Ces boules sont indiscernables au toucher. Un joueur tire, au hasard, une boule dans l'urne.

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- **R : « tirer une boule rouge »** Il y a une boule rouge parmi les 10 boules
  D'où $p(R) = \frac{1}{10} = 0{,}1$
- **B : « tirer une boule bleue »** Il y a deux boules bleues parmi les 10 boules
  D'où $p(B) = \frac{2}{10} = 0{,}2$
- **J : « tirer une boule jaune »** Il y a trois boules jaunes parmi les 10 boules
  D'où $p(J) = \frac{3}{10} = 0{,}3$
- **V : « tirer une boule verte »** Il y a quatre boules vertes parmi les 10 boules
  D'où $p(R) = \frac{4}{10} = 0{,}4$

2) En fonction de la couleur tirée, le joueur se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante :

- **si la boule tirée est rouge, on gagne 15 €**
- **si la boule tirée est bleue ou jaune, on gagne 2 €**
- **si la boule tirée est verte, on perd 10€**

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage, le « gain » réalisé par le joueur.

a) En déduire de la question 1, $P(X = 15)$, $P(X = 2)$ et $P(X = -10)$

$P(X = 15) = P(R) = 0{,}1$
$P(X = 2) = P(B) + P(J) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$
$P(X = -10) = P(V) = 0{,}4$

b) Déterminer l'espérance mathématiques de X et en interpréter le résultat. Le jeu est-il équitable pour le joueur ?

X est la variable aléatoire qui associe le « gain »
X peut prendre les valeurs 15, 2 et -10

Loi de probabilité de X

x_i	15	2	-10
$P(X = x_i)$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}4$

Espérance de X

$E(X) = 15 \times 0{,}1 + 2 \times 0{,}5 + (-10) \times 0{,}4 = -1{,}5$

Conclusion

Comme l'espérance est de -1,5, cela signifie qu'en jouant un très grand nombre de fois ce jeu, on perd en moyenne 1,5 €
Le jeu est donc défavorable au joueur

3) maintenant, on gagne toujours 15€ si la boule tirée est rouge, et on perd toujours 10 € si la boule tirée est verte. Par contre, on gagne m si elle est bleue ou jaune, m désignant un réel positif. Calculer m pour que le jeu soit équitable.

Nouvelle loi de probabilité de X

x_i	15	m	-10
$P(X = x_i)$	$0{,}1$	$0{,}5$	$0{,}4$

Espérance de X

$$E(X) = 0$$
$$15 \times 0{,}1 + m \times 0{,}5 + (-10) \times 0{,}4 = 0$$
$$1{,}5 + 0{,}5\,m - 4 = 0$$
$$0{,}5\,m = 4 - 1{,}5$$
$$0{,}5\,m = 2{,}5$$
$$m = \frac{2{,}5}{0{,}5}$$
$$m = 5$$

Conclusion

Le jeu devient équitable si on gagne 5 € si on tire une boule bleue ou jaune

Exercice 2 **- 8 points -**

Un magasin de déstockage STOCKAMI a reçu un lot important de jeans qui peuvent avoir deux types de défauts : un défaut de couleur ou un défaut de taille.
Il note aussi que :

- **4 % de ces jeans présentent un défaut de coloris,**
- **3 % des jeans ont un problème de taille,**
- **2 % des jeans ont à la fois un défaut de coloris et problème de taille.**

On choisit au hasard un jeans dans le lot. On considère les événements suivants :
C : « Le jeans présente un défaut de coloris »,
T : « Le jeans a un problème de taille».

1. Compléter le tableau à double entrée suivant :

Défaut T / Défaut C	Oui	Non	Total
Oui	2	2	4
Non	1	95	96
Total	**3**	97	**100**

2. A l'aide du tableau à double entrée, donner la probabilité des événements suivants :
D : « Le jeans présente au moins un défaut »,
E : « Le jeans présente un seul défaut »,
F : « Le jeans est sans défaut ».
Vous écrirez les évènements D, E et F en fonction des évènements$C$, $\overline{C}$, T et $\overline{T}$ puis

$$p\,(D) = p\,(C \cup T) = p\,(C) + p\,(T) - p\,(C \cap T) = 0{,}04 + 0{,}03 - 0{,}02 = 0{,}05$$
$$p\,(E) = p\,(C \cap \bar{T}) + p\,(T \cap \bar{C}) = 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}03$$
$$p\,(F) = p\,(\bar{C} \cup \bar{T}) = 0{,}95$$

3. Le propriétaire du magasin vend un jeans sans défaut 40 euros, il fait une remise de 20 % si le jeans a un seul défaut, et de 50 % s'il a les deux défauts.

a. Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X, d'un jeans.

Les valeurs prises par X sont :

- 40 si le jeans n'a aucun défaut,
- 32 si le jeans présente un défaut car $40 \times (1 - 0{,}20) = 32$
- 20 si le jeans présente les deux défauts car $40 \times (1 - 0{,}50) = 20$

$p\,(X = 40) = p\,(F) = 0{,}95$
$p\,(X = 32) = p\,(E) = 0{,}03$
$p\,(X = 20) = p\,(C \cap T) = 0{,}02$

D'où la loi de probabilité du prix de vente en euros d'un jeans, noté X.

x_i	20	32	40
$p(X = x_i)$	0,02	0,03	0,95

b. Calculer l'espérance de X.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \times p_i = 0{,}02 \times 20 + 0{,}03 \times 32 + 0{,}95 \times 40 = 39{,}36$$

c. Quel chiffre d'affaires le propriétaire peut-il espérer faire sur la vente de cent jeans ?

Sur la vente de 100 jeans, le propriétaire peut espérer faire un chiffre d'affaires égal à : 3 936 €
Car 100 × 39,36 = 3 936

<u>Exercice 3</u> - 3 points -

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $\begin{cases} u_0 = 115 \\ u_{n+1} = 0{,}4 \times u_n + 120 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_0 = 115$
$u_1 = 0{,}4 \times u_0 + 120 = 0{,}4 \times 115 + 120 = 166$
$u_2 = 0{,}4 \times u_1 + 120 = 0{,}4 \times 166 + 120 = 186{,}4$

2. Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul un algorithme permet de déterminer les termes de la suite (u_n), lequel ?

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début :** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0{,}6 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début :** Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire Affecter 115 à U Affecter $0{,}4 \times U + 115$ à U Fin Pour Afficher U Fin	**Variables :** U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers **Début :** Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0{,}4 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin

Pas algorithme 1 le coefficient est de 0,6 * U et non 0,4
Pas algorithme 2 l'affectation de U se fait à chaque boucle

<u>Donc</u> l'algorithme 3 est juste

Exercice 4 **- 7 points -**

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$.
On note f' la dérivée de la fonction f.

1. Calculer $f'(x)$.

On a $f(x) = 2x^3 + x^2 + x + 2$
Comme f est dérivable comme fonction polynomiales
D'où $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 2x + 1$
Donc $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$

2. Étudier le signe de $f'(x)$.

On a $f'(x) = 6x^2 + 2x + 1$

On calcule le discriminant du trinôme
$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 6 \times 1 = 4 - 24 = -20$
Comme $\Delta < 0$
Alors $f'(x)$ est du signe de $a = 6$

Comme $\Delta < 0$ et $a < 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$

3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.
D'où le tableau des variations de la fonction

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$

4. La courbe représentative de f admet-elle une tangente horizontale ? Justifier.

On sait que la courbe représentative de f admettra une tangente horizontale s'il existe une valeur x tel que $f'(x) = 0$
Or d'après la question 2, pour tout réel x on a $f'(x) > 0$ (strictement positive)
Donc la courbe représentative de f n'admet pas de tangente horizontale

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = 2n^3 + n^2 + n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

$u_0 = 2 \times 0^3 + 0^2 + 0 + 2 = 2$
$u_1 = 2 \times 1^3 + 1^2 + 1 + 2 = 2 \times 1 + 1 + 3 = 6$
$u_2 = 2 \times 2^3 + 2^2 + 2 + 2 = 2 \times 8 + 4 + 4 = 24$

2. Quel lien y a-t-il entre u_n, n et f ?

On constate que $u_n = f(n)$

3. En déduire la monotonie de la suite (u_n).

Comme $u_n = f(n)$
Alors $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$
Comme la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$,
Alors $f(n+1) > f(n)$
$f(n+1) - f(n) > 0$
D'où $u_{n+1} - u_n > 0$
$u_{n+1} > u_n$
Donc la suite (u_n) est croissante

Exercice 5 - 13 points -

Une agence de publicité est chargée d'assurer la promotion d'une nouvelle marque STOCKAMI.

Une enquête réalisée par cette agence montre que la fréquence $f(x)$ des personnes connaissant le nom de cette marque au bout de x semaines de publicité est donné par $f(x) = \frac{3x}{3x+2}$

1) a) Calculer $f(2)$.

On a $f(x) = \frac{3x}{3x+2}$
D'où $f(2) = \frac{3\times2}{3\times2+2} = \frac{6}{8} = 0{,}75$

Donc $f(2) = 0{,}75$

b) En déduire le pourcentage de personnes qui ignorent le nom de cette marque après deux semaines de publicité.

D'après le 1 a), on sait qu'au bout de 2 semaines environ 75 % des personnes connaissent le nom STOCKAMI
Donc au bout de 2 semaines, 25 % des personnes ne connaissent pas cette marque.

c) Donner une interprétation simple du nombre $f(0)$.

On a $f(x) = \frac{3x}{3x+2}$
D'où $f(0) = \frac{3\times0}{3\times0+2} = \frac{0}{2} = 0$

Donc $f(0)$ correspond à la fréquence des individus connaissant cette marque au moment du lancement de la campagne publicitaire
D'où au lancement personne ne connait pas STOCKAMI.

Pour la suite de l'exercice, on supposera que $x \in [0;18]$.

2) a) Calculer $f'(x)$.

On a $f(x) = \frac{3x}{3x+2}$
Comme f est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables
D'où $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3x$ $\quad u'(x) = 3$
$v(x) = 3x + 2$ $\quad v'(x) = 3$

Alors $f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$$f'(x) = \frac{3\times(3x+2) - 3(3x)}{(3x+2)^2} = \frac{9x+6-9x}{(3x+2)^2} = \frac{6}{(3x+2)^2}$$

Donc $f'(x) = \frac{6}{(3x+2)^2}$

b) Étudier le sens de variations de f sur $[0;18]$.

On a $f'(x) = \frac{6}{(3x+2)^2}$
Comme pour tout réel x, $(3x+2)^2 > 0$
et $6 > 0$
Donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$

x	0	18
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$0,964$

c) Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de f en son point A au point d'abscisse $a = 1$.

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$

Avec $f(1) = \frac{3\times1}{3\times1+2} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$f'(1) = \frac{6}{(3\times1+2)^2} = \frac{6}{5^2} = 0{,}24$

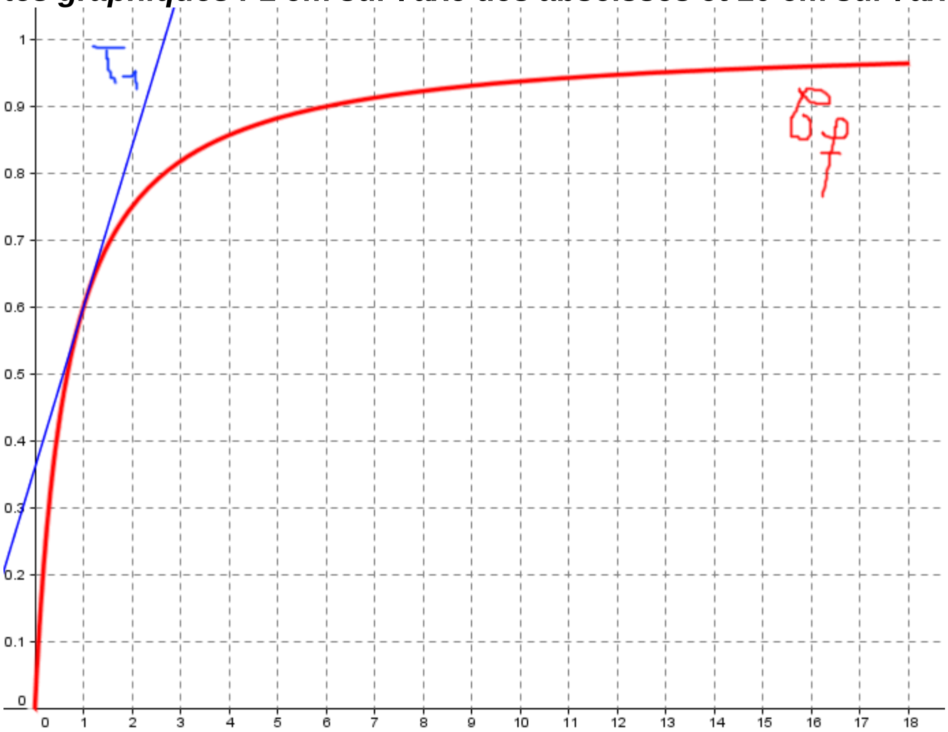
D'où $y = 0{,}24 \times (x-1) + 0{,}6$

$y = 0{,}24\,x - 0{,}24 + 0{,}6$

$y = 0{,}24\,x + 0{,}36$

La tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse − 4 a pour équation $y = 0{,}24\,x + 0{,}36$.

d) Tracer sommairement l'allure de C_f la courbe représentative de f sur $[0;18]$ ainsi que la tangente T_1. ***Unités graphiques :*** **1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.**



3) a) Déterminer le nombre de semaines nécessaires pour que 90% de la population connaisse le nom STOCKAMI. Justifier.

On doit donc résoudre $f(x) = 0{,}9$

Graphiquement, on cherche donc l'antécédent de 0,9

On cherche les abscisses des points de C_f dont l'ordonnée vaut 0,9

On trouve 6

Algébriquement

$f(x) = 0{,}9$

$\frac{3x}{3x+2} = 0{,}9$

$3x = 0{,}9\,(3x+2)$

$3x = 2{,}7x + 1{,}8$

$3x - 2{,}7x = 1{,}8$

$0{,}3\,x = 1{,}8$

$x = \frac{1{,}8}{0{,}3} = 6$

Donc il faut 6 semaines pour que 90% de la population connaisse le nom de cette marque.

b) Que peut-on prévoir sur la fréquence des personnes connaissant le nom de STOCKAMI au bout d'un très grand nombre de semaines ? On ne demande ici aucune justification.

A long terme, la fréquence des personnes connaissant STOCKAMI va être proche de 1

Par exemple pour $x = 10$, $f(10) = \frac{30}{32} \approx 0{,}933$ ...