DS 4 - RATTRAPAGE 15/02/2017

Durée : 2 heures **Avec Calculatrice**

Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
/ 30	/ 3	/ 4	/ 5	/ 9	/ 9

Rappel : tous les résultats seront à justifier sauf avis contraire

Exercice 1 - 3 points -

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1. g définie sur ℝ par $g(x) = -3x^3 - x - 4$
2. h définie sur ℝ par $h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{5} - 1$
3. m définie sur ℝ par $m(x) = (x^2+1)(-2x^3+3x-5)$

Exercice 2 - 4 points -

Soit la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1-3x}{2-x}$.

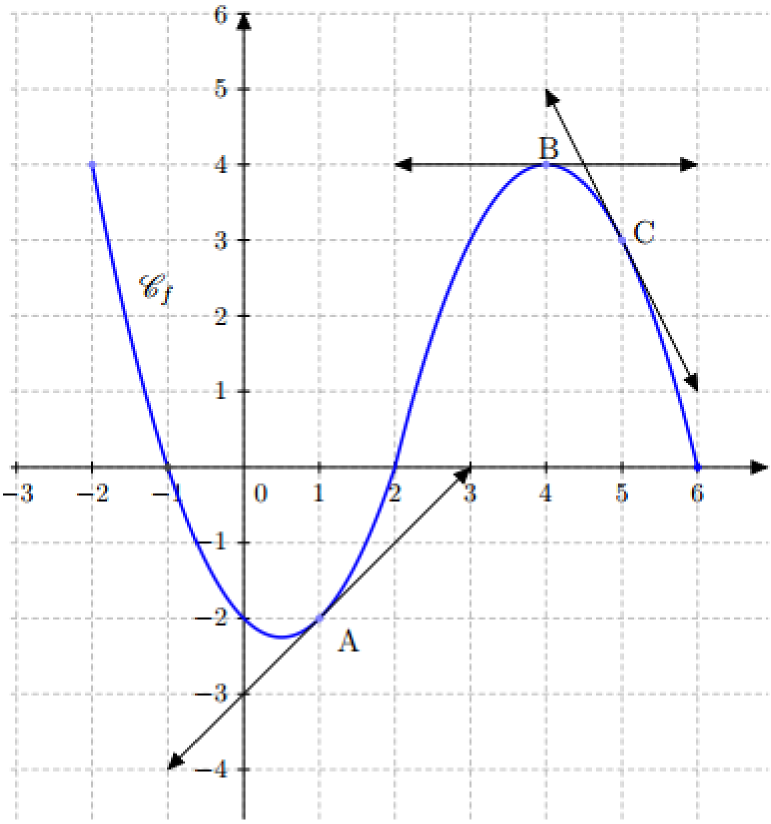
1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.
2. Déterminer les variations de la fonction f sur $]2\,;+\infty[$.
3. Déterminer une équation de la tangente T_3 à C_f au point d'abscisse 3.

Exercice 3 - 5 points -

Soit la courbe C_f représentative de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle I.

Par lecture graphique :

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(3)$.
2. Trouver les équations des tangentes à C_f aux points A, B et C d'abscisses 1, 4 et 5.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$.



Exercice 4 **- 9 points -**

Partie A : Calcul algébrique

On considère la fonction f définie par sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x-4)(-x^2+2x-1)$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. Résoudre l'équation $f(x) > 0$.

Partie B : lecture graphique

Sur la figure ci-dessous est tracée en partie la courbe représentative de la fonction f (donnée dans la partie A).
Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite (T) est la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 4.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f'(1)$, $f'(3)$ et $f'(4)$.

3. Démontrer que la tangente à la courbe de f au point A admet pour équation $y = -9x + 36$.

Exercice 5 **- 9 points -**

Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 80 tonnes de produit chimique.

Le coût de fabrication de x tonnes, exprimé en centaines d'euro, est donné par la fonction C définie par :

$$C(x) = 0{,}01\,x^3 - 1{,}05\,x^2 + 37x + 40$$

Chaque tonne est vendue 19 centaines d'euro.

1. Calculer, en euro, le coût de fabrication, la recette et le bénéfice correspondant à 40 tonnes.

2. Exprimer en fonction de x la recette $R(x)$ en centaine d'euro.

3. Montrer que le bénéfice mensuel en centaines d'euro, est donné par la fonction B définie par :

$$B(x) = -0{,}01\,x^3 + 1{,}05\,x^2 - 18x - 40$$

4. Calculer $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B.

5. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;\,80]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;\,80]$.

6) Déduire de la question précédente, le nombre de tonnes que doit vendre l'entreprise pour que son bénéfice mensuel soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice en euro ?

DS 4 - RATTRAPAGE 15/02/2017

Exercice 1 **- 3 points -**

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous :

1) $\boldsymbol{g}$ **définie sur IR par** $\boldsymbol{g(x) = -3x^3 - x - 4}$

g dérivable sur IR car fonction polynôme et $g'(x) = -9x^2 - 1$

2) $\boldsymbol{h}$ **définie sur IR par** $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{5} - 1}$

h dérivable sur IR car fonction polynôme et $h'(x) = x - \frac{2}{5}$

4) $\boldsymbol{m}$ **définie sur IR par** $\boldsymbol{m(x) = (x^2 + 1)(-2x^3 + 3x - 5)}$

m dérivable sur IR car fonction polynôme

et $m = u \times v$ avec $u(x) = x^2 + 1$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = -2x^3 + 3x - 5$ $v'(x) = -6x^2 + 3$

$m' = u'v + v'u$

$m'(x) = 2x(-2x^3 + 3x - 5) + (-6x^2 + 3)(x^2 + 1)$

$m'(x) = -4x^4 + 6x^2 - 10x - 6x^4 - 6x^2 + 3x^2 + 3$

$m'(x) = -10x^4 + 3x^2 - 10x + 3$

Exercice 2 **- 4 points -**

Soit la fonction $\boldsymbol{f}$ **définie sur** $]2\,;+\infty[$ **par** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1-3x}{2-x}}$**.**

1. Déterminer la fonction dérivée $\boldsymbol{f'}$ **de la fonction** $\boldsymbol{f}$ **sur** $]2\,;+\infty[$**.**

f dérivable sur $]2;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables

et $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 1 - 3x$ $u'(x) = -3$

$v(x) = 2 - x$ $v'(x) = -1$

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-3)(2-x) - (-1)(1-3x)}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6 + 3x + 1 - 3x}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(2-x)^2}$$

2. Déterminer les variations de la fonction $\boldsymbol{f}$ **sur** $]2\,;+\infty[$**.**

<u>On sait que</u> $f'(x) = \frac{-5}{(2-x)^2}$

<u>Comme</u> pour tout $x \in]2\,;+\infty[$, $(2-x)^2 > 0$ et $-5 < 0$

<u>Alors</u> $f'(x) = \frac{-5}{(2-x)^2} < 0$

<u>Donc</u> la fonction f est décroissante sur $]2\,;+\infty[$

3. Déterminer une équation de la tangente $\boldsymbol{T_3}$ **à** $\boldsymbol{C_f}$ **au point d'abscisse 3.**

L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

<u>On sait que</u> $f'(3) = \frac{-5}{(2-3)^2} = \frac{-5}{(-1)^2} = \frac{-5}{1} = -5$

Et $f(3) = \frac{1-3\times3}{2-3} = \frac{1-9}{-1} = \frac{-8}{-1} = 8$

<u>Donc</u> $y = -5(x-3) + 8$

$y = -5x + 15 + 8$

$y = -5x + 23$

<u>Donc</u> la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3 est $y = -5\,x + 23$

Exercice 3 **- 5 points -**

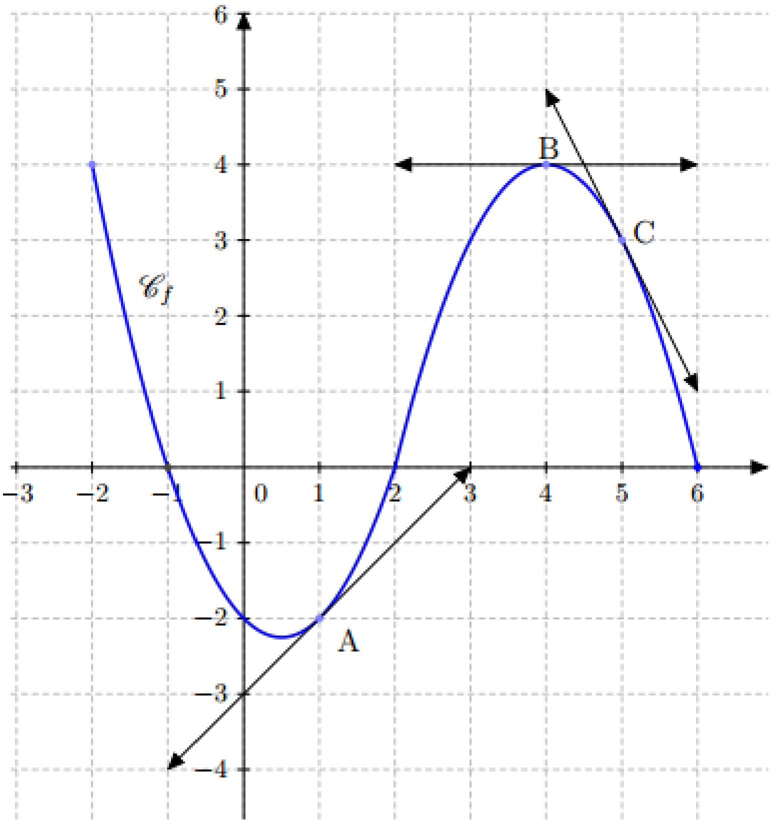
Soit la courbe C_f représentative de la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle I.
Par lecture graphique :

1. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $f(3)$.

- $f(1) = -2$
  car l'image de 1 par la fonction f est -2
- $f(3) = 3$
  car l'image de 5 par la fonction f est 3

2. Trouver les équations des tangentes à C_f aux points A, B et C d'abscisses 1, 4 et 5.

- l'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 1 est : $y = x - 3$.
- l'équation de la tangente à la courbe C_f au point B d'abscisse 4 est : $y = 4$.
- l'équation de la tangente à la courbe C_f au point C d'abscisse 5 est : $y = -2x + 13$.



3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

On cherche les es abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses
<u>Donc</u> l'équation $f(x) = 0$ a trois solutions

4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

On cherche les abscisses des points ayant des tangentes horizontales à C_f
<u>Donc</u> l'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions

Exercice 4 **- 9 points -**

<u>**Partie A :**</u> **Calcul algébrique**

On considère la fonction f définie par sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x - 4)(-x^2 + 2x - 1)$

On développe la forme proposée :

$$\begin{aligned}(x-4)(-x^2+2x-1) &= -x^3 + 2x^2 - x + 4x^2 - 4 \times 2x + 4 \\ &= -x^3 + 6x^2 - x - 8x + 4 \\ &= -x^3 + 6x^2 - 9x + 4 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

<u>On a bien :</u> $f(x) = (x - 4)(-x^2 + 2x - 1)$

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-4)(-x^2+2x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 4 = 0 \text{ ou } -x^2 + 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \text{ ou } x = 1\end{aligned}$$

Donc $S = \{1; 4\}$

3. Résoudre l'équation $f\,(x) > 0$.

On a $f\,(x) = (x-4)(-x^2+2\,x-1)$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x^2+2x-1$		$-$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	

$x-4=0 \qquad x=4$

$\Delta = 0$ et $a < 0$

Donc $S =]-\infty;1[\cup]1;\ 4[$

<u>Partie B :</u> lecture graphique

Sur la figure ci-dessous est tracée en partie la courbe représentative de la fonction f (donnée dans la partie A).

Les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et 3 sont parallèles à l'axe des abscisses.
La droite (T) est la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 4.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f\,(x) = 4$.

On cherche les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée vaut 4
<u>On trouve</u> $S = \{0\,;3\}$

2. Déterminer graphiquement les nombres dérivés $f\,'(1)$, $f\,'(3)$ et $f\,'(4)$.

- $f\,'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
  Cette tangente est horizontale donc de coefficient directeur nul d'où : $f\,'(1) = 0$.

- $f\,'(3)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.
  Cette tangente est horizontale donc de coefficient directeur nul d'où : $f\,'(3) = 0$.

- $f\,'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 4.
  Cette tangente est la droite (T). On choisit deux points de la droite : A(4 ;0) et par exemple B(3;9)
  Pour se déplacer de B à A on avance de 1 carreau et on descend de 9 carreaux
  d'où le coefficient directeur $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{9}{1} = -9$
  On en déduit que $f\,'(4) = -9$.

3. Démontrer que la tangente à la courbe de f au point A admet pour équation $y = -9\,x + 36$.

Le point A est le point de la courbe d'abscisse 4 donc l'équation de la tangente à la courbe au point A est donnée par : $y = f'(4)(x-4) + f\,(4)$
<u>On sait que</u> $f'(4) = -9$ d'après la question précédente et $f\,(4) = 0$ (lecture graphique) <u>Donc</u>

$$y = -9(x-4) + 0$$
$$y = -9\,x - 9 \times 4$$

<u>Donc</u> la tangente à la courbe de f au point A est bien $y = -9\,x - 36$

<u>Exercice 5</u> - 9 points -

Une entreprise fabrique mensuellement une quantité de 0 à 80 tonnes de produit chimique.

Le coût de fabrication de x tonnes, exprimé en centaines d'euro, est donné par la fonction C définie par : $\boldsymbol{C(x) = 0,01\,x^3 - 1,05\,x^2 + 37x + 40}$

Chaque tonne est vendue 19 centaines d'euro.

1. Calculer, en euro, le coût de fabrication, la recette et le bénéfice correspondant à 40 tonnes.

Le coût de fabrication : 48 000 € car $C(30) = 0{,}01 \times 40^3 - 1{,}05 \times 40^2 + 37 \times 40 + 40 = 480$
La recette : 76 000 € car $1900 \times 40 = 76\,000$
Le bénéfice : 28 000 € car $76\,000 - 48\,000 = 28\,000$

Donc le bénéfice pour 40 tonnes est de 28 000€

2. Exprimer en fonction de x la recette $R(x)$ en centaine d'euro.

On sait que chaque tonne est vendue 19 centaines d'euro.
D'où $R(x) = 19 \times x$

3. Montrer que le bénéfice mensuel en centaines d'euro, est donné par la fonction B définie par :

$$\boldsymbol{B(x) = -\,0,01\,x^3 + 1,05\,x^2 - 18x - 40}$$

On sait que $B(x) = R(x) - C(x)$

Alors $B(x) = 19x - (\,0{,}01\,x^3 - 1{,}05\,x^2 + 37x + 40)$

$B(x) = 19x - 0{,}01\,x^3 + 1{,}05\,x^2 - 37x - 40$

$B(x) = -0{,}01\,x^3 + 1{,}05\,x^2 - 18x - 40$

4. Calculer $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B.

On sait que $B(x) = -0{,}01\,x^3 + 1{,}05\,x^2 - 18x - 40$

D'où $B'(x) = -0{,}01 \times 3x^2 + 1{,}05 \times 2x - 18 \times 1$

$B'(x) = -0{,}03x^2 + 2{,}1\,x - 18$

5. Etudier le signe de $B'(x)$ sur $[0\,;\,80]$. En déduire le tableau de variation de la fonction B sur $[0\,;\,80]$.

On sait que $B'(x) = -0{,}03x^2 + 2{,}1\,x - 18$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (2{,}1)^2 - 4 \times (-0{,}03) \times (-18) = 2{,}25$
Comme $\Delta > 0$
Alors l'équation admet deux solutions

D'où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2{,}1)-\sqrt{2{,}25}}{2\times(-0{,}03)} = \frac{-2{,}1-1{,}5}{-0{,}06} = \frac{-3{,}6}{-0{,}06} = 60$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2{,}1)+\sqrt{2{,}25}}{2\times(-0{,}03)} = \frac{-2{,}1+1{,}5}{-0{,}06} = \frac{-0{,}6}{-0{,}06} = 10$

x	0		10		60		80
$B'(x)$		−	0	+	0	−	
$B(x)$	−40	↘	−125	↗	500	↘	120

Car $\Delta > 0$ et $a < 0$

6) Déduire de la question précédente, le nombre de tonnes que doit vendre l'entreprise pour que son bénéfice mensuel soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice en euro ?

On déduit de la question précédente que le nombre de tonnes que doit vendre l'entreprise pour que son bénéfice mensuel soit maximal est de 60. Ce bénéfice est alors de 50 000 €.