DS 1 – 29 SEPTEMBRE 2016

Durée : 2h **Avec Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
/ 30	/ 3	/ 6	/ 6	/ 3	/ 12

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Lien entre l'allure de la courbe et le signe discriminant				
Utiliser la forme canonique d'un polynôme du second degré pour connaitre ses variations, son extremum				
Choisir la forme d'une expression algébrique la plus adaptée.				
Résoudre une équation du second degré				

Exercice 1 **- 3 points -**

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse.
Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 point. Une réponse fausse non justifiée enlève 0,5 point.

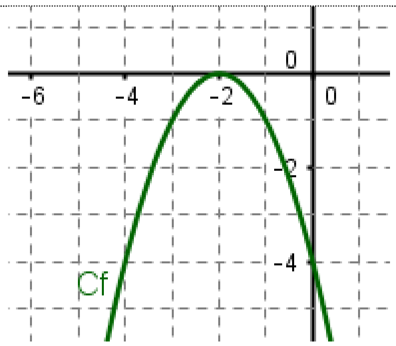
Soit la fonction f, définie par $f(x) = -x^2 - 4x - 4$, est représentée ci-contre.

L'équation $-x^2 - 4x - 4 = 0$ a :

A - $\Delta = 0$

B - $\Delta < 0$

C - $\Delta > 0$



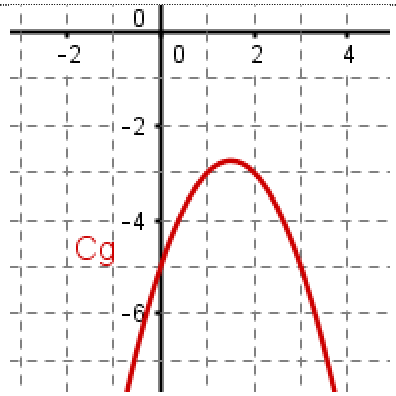
Soit la fonction g, définie par $g(x) = -x^2 + 3x - 5$, est représentée ci-contre.

L'équation $-x^2 + 3x - 5 = 0$ a :

A - Aucune solution

B - Une solution : -5

C - Deux solutions non visibles ici



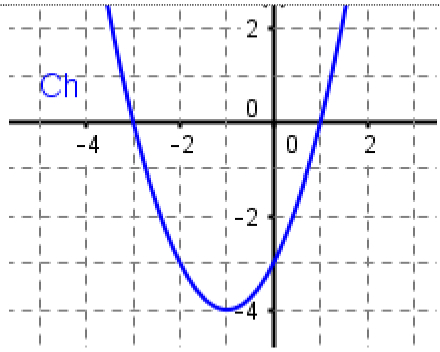
Soit la fonction h, définie par $h(x) = x^2 + 2x - 3$, est représentée ci-contre :

L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ a :

A - Δ est nul

B - Δ est négatif

C - Δ est positif



Exercice 2 **- 6 points -**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x+3)^2 - 25$.

1. Vérifier que f peut aussi s'écrire :
(a) $f(x) = x^2 + 6x - 16$ (b) $f(x) = (x-2)(x+8)$

2. En choisissant la forme la plus adaptée de f calculer : $f(0)$, $f(-3)$ et $f(2)$.

3. En choisissant la forme la plus adaptée de f résoudre les équations suivantes :
$f(x) = 0$ puis $f(x) = -16$.

Exercice 3 **- 6 points -**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$3x + 2 = 5x^2$ $x^2 + 3 = x$ $2(x^2 - 1) = 3x$

Exercice 4 **- 3 points -**

On donne $f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$, l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer le tableau de variation de f puis les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

Exercice 5 **- 12 points -**

Une société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0\,;\,60]$. Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 300$.

1. Calculer le nombre de parapluies fabriqués correspondant à un coût de 600 euros.

2. Étudier les variations de C sur l'intervalle $x \in [0\,;\,60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $C(0)$ et $C(60)$.

3. Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 36 euros. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$.

4. Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x parapluies est donné, pour $x \in [0\,;\,60]$ par $B(x) = -x^2 + 56x - 300$

5. Étudier les variations de B sur l'intervalle $x \in [0\,;\,60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $B(0)$ et $B(60)$.

6. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

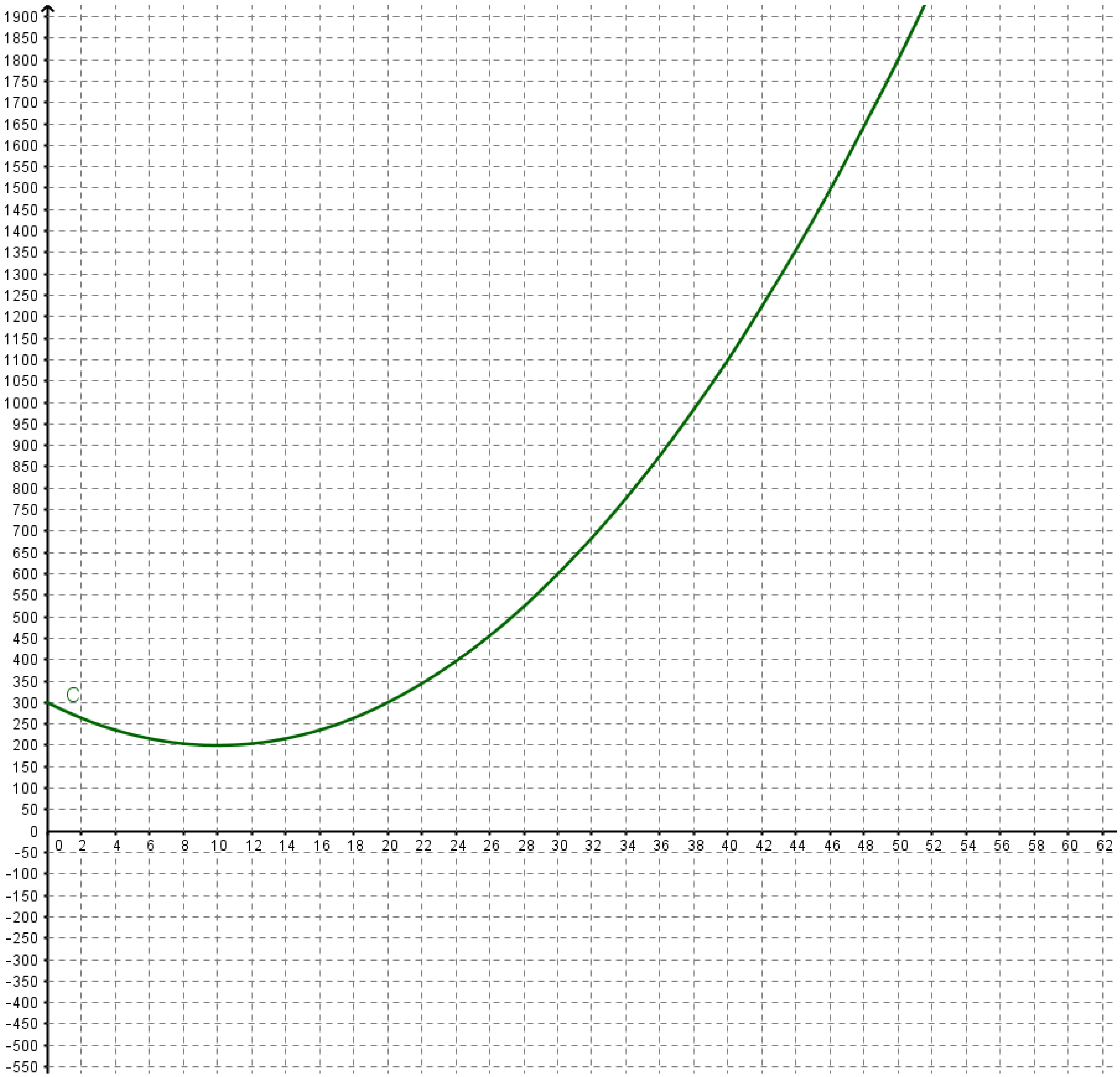
7. Sur le graphique de l'annexe, on a tracé C_C, la courbe représentative de la fonction des coûts C. Construire C_R, la courbe représentative de la fonction des recettes R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.

8. Retrouver graphiquement le bénéfice maximal, sans tracer la courbe des bénéfices, juste à l'aide des courbes des coûts et des recettes. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.

9. Construire C_B, la courbe représentative de la fonction des bénéfices B.

ANNEXE : DS 1 – 29 SEPTEMBRE 2016

NOM : **Prénom :**



DS 1 – 26 SEPTEMBRE 2016

Durée : 2h **Avec Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

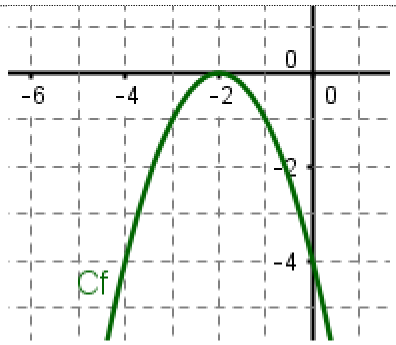
Bilan	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5
/ 30	/ 3	/ 6	/ 6	/ 3	/ 12

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Lien entre l'allure de la courbe et signe de a et du discriminant				
Utiliser la forme canonique d'un polynôme du second degré pour connaitre ses variations, son extremum				
Déterminer la forme factorisée d'un polynôme du second degré				
Résoudre une équation du second degré				

Exercice 1 **- 3 points -**

Pour chacune des questions, une seule réponse parmi les trois est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie correspondante puis justifier cette réponse. Chaque réponse exacte et justifiée rapportera 1 point. Une réponse fausse non justifiée enlève 0,5 point.

Soit la fonction f , définie par $f(x) = -x^2 - 4x - 4$, est représentée ci-contre :



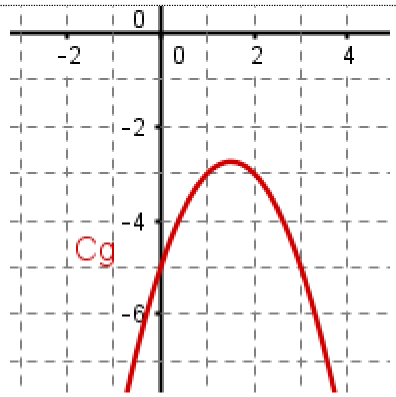
L'équation $-x^2 - 4x - 4 = 0$ a :

A - $\Delta = 0$ on a un seul point d'intersection de la courbe Cf et l'axe des abscisses

B - $\Delta < 0$

C - $\Delta > 0$

Soit la fonction g , définie par $g(x) = -x^2 + 3x - 5$, est représentée ci-contre :



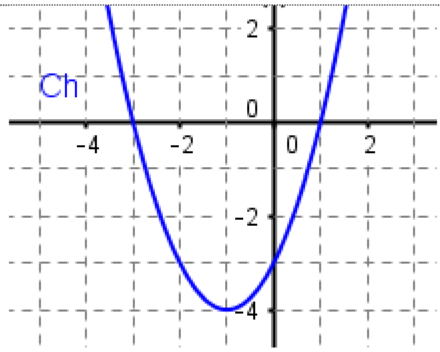
L'équation $-x^2 + 3x - 5 = 0$ a :

A - Aucune solution on a aucun point d'intersection entre la courbe Cf et l'axe des abscisses

B - Une solution : -5

C - Deux solutions non visibles ici

Soit la fonction h , définie par $h(x) = x^2 + 2x - 3$, est représentée ci-contre :



L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ a :

A - Δ est nul

B - Δ est négatif

C - Δ est positif on a deux points d'intersection entre la courbe Cf et l'axe des abscisses

Exercice 2 **- 6 points -**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x+3)^2 - 25.$

1. Vérifier que f peut aussi s'écrire :

(a) $f(x) = x^2 + 6x - 16$

(b) $f(x) = (x-2)(x+8)$

On sait que $f(x) = (x+3)^2 - 25 = x^2 + 6x + 9 - 25 = x^2 + 6x - 16$

Et $(x-2)(x+8) = x^2 + 8x - 2x - 16 = x^2 + 6x - 16 = f(x)$

Donc $f(x) = (x+3)^2 - 25 = x^2 + 6x - 16 = (x-2)(x+8)$

2. En choisissant la forme la plus adaptée de f calculer : $f(0)$, $f(-3)$ et $f(2)$.

		calculs
$f(0)$	forme développée	$f(0) = 0^2 + 6 \times 0 - 16 = -16$
$f(-3)$	forme canonique	$f(-3) = (-3+3)^2 - 25 = 0 - 25 = -25$
$f(2)$	forme factorisée	$f(2) = (2-2)(2+8) = 0 \times 10 = 0$

3. En choisissant la forme la plus adaptée de f résoudre les équations suivantes : $f(x) = 0$, et $f(x) = -16$.

		calculs
$f(x) = 0$	forme factorisée	$f(x) = 0$ $(x-2)(x+8) = 0$ soit $x - 2 = 0$ soit $x + 8 = 0$ $x = 2$ $x = -8$ $S = \{-8; 2\}$
$f(x) = -16$	forme développée	$f(x) = -16$ $x^2 + 6x - 16 = -16$ $x^2 + 6x - 16 + 16 = 0$ $x^2 + 6x = 0$ $x(x+6) = 0$ soit $x = 0$ soit $x + 6 = 0$ $x = -6$ $S = \{-6; 0\}$

Exercice 3 **- 6 points -**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$3x + 2 = 5x^2$ $\qquad$ $x^2 + 3 = x$ $\qquad$ $2(x^2 - 1) = 3x$

a) $3x + 2 = 5x^2 \quad \Leftrightarrow \quad -5x^2 + 3x + 2 = 0$

On doit résoudre $-5x^2 + 3x + 2 = 0$
On a $a = -5$, $b = 3$ et $c = 2$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 9 + 40 = 49$
Comme $\Delta > 0$
Alors l'équation admet deux solutions
D'où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-\sqrt{49}}{2\times(-5)} = \frac{-3-7}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+\sqrt{49}}{2\times(-5)} = \frac{-3+7}{-10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$

Donc $S = \left\{-\frac{2}{5}; 1\right\}$

b) $x^2+3=x \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x+3=0$

On doit résoudre $\quad x^2-x+3=0$
On a $\ a=1,\ b=-1$ et $c=3$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac=(-1)^2-4\times 1\times 3=1-12=-11$
Comme $\Delta<0$
Alors l'équation n'admet pas de solutions

Donc $S=\emptyset$

c) $2(x^2-1)=3x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-2=3x$
$\Leftrightarrow \quad 2x^2-3x-2=0$

On doit résoudre $\quad 2x^2-3x-2=0$
On a $\ a=2,\ b=-3$ et $c=-2$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times(-2)=9+16=25$
Comme $\Delta>0$
Alors l'équation admet deux solutions
D'où $\ x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2$

Donc $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$

Exercice 4 - 3 points -

On donne $f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, l'expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le tableau de variation de f puis les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

On a $\ f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=$

Alors la courbe C_f admet un maximum en $S\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$ car $\ a=-1<0$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{4}$	$\searrow$	

Ensuite on doit déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses c'est-à-dire qu'il faut résoudre $\ f(x)=0$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow -\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow -x^2+x-\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow -x^2+x+1=0$$

On doit résoudre $\quad -x^2+x+1=0$
On a $\ a=-1,\ b=1$ et $c=1$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac=(1)^2-4\times(-1)\times 1=1+4=5$
Comme $\Delta>0$
Alors l'équation admet deux solutions
D'où $\ x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2\times(-1)}=\frac{-1+\sqrt{5}}{-2}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Donc les abscisses des points d'intersections de C_f et C_g sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Exercice 5 **- 12 points -**

Une société fabrique chaque jour x parapluies avec $x \in [0\ ;\ 60]$. Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 20x + 300$.

1. Calculer le nombre de parapluies fabriqués correspondant à un coût de 600 euros.

Le coût total de production de ces parapluies, exprimé en euros, est donné par

$$C(x) = x^2 - 20x + 300$$

Donc on cherche x tel que : $C(x) = 600 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 300 = 600$
$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 300 - 600 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 20x - 300 = 0$

On doit résoudre $x^2 - 20x - 300 = 0$
On a $a = 1$, $b = -20$ et $c = -300$
On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 1 \times (-300) = 400 + 1200 = 1600$
Comme $\Delta > 0$
Alors l'équation admet deux solutions

D'où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20)-\sqrt{1600}}{2\times1} = \frac{20-40}{2} = \frac{-20}{2} = -10$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-20)+\sqrt{1600}}{2\times1} = \frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$

Donc $S = \{-10; 30\}$

Mais $-10 \notin [0; 60]$ et $30 \in [0; 60]$
Alors l'unique solution dans l'intervalle [0 ; 60] est 30

Donc le nombre de parapluies fabriqués correspondant à un coût de 600 euros est donc de 30.

2. Étudier les variations de C sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $C(0)$ et $C(60)$.

On a $C(x) = x^2 - 20x + 300$
La fonction C est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1$; $b = -20$; $c = 200$.
Comme le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif
Alors sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum

Les coordonnées du sommet est $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ avec $-\frac{b}{2a} = -\frac{-20}{2\times1} = 20$

$C(20) = 20^2 - 20 \times 20 + 300 = 300$

Donc $S_C(20; 300)$

x	0	10	60
Variation de C	300 ↘	200	↗ 2700

$C(0) = 0^2 - 20 \times 0 + 300 = 300$

$C(60) = 60^2 - 20 \times 60 + 300$
$= 2\,700$

3. Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 36 euros. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$.

Chaque parapluie fabriqué est vendu au prix unitaire de 36 euros.
Donc la recette R est $R(x) = 36x$

4. Justifier que le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x parapluies est donné, pour $x \in [0\ ;\ 60]$ par $B(x) = -x^2 + 56x - 300$

On a $C(x) = x^2 - 20x + 300$ et $R(x) = 36x$
Comme le bénéfice est la différence entre les recettes et les couts
On obtient $B(x) = R(x) - C(x)$
$B(x) = 36x - (x^2 - 20x + 300) = 36x - x^2 + 20x - 300 = -x^2 + 56x - 300$
Donc $B(x) = -x^2 + 56x - 300$

5. Étudier les variations de B sur l'intervalle $x \in [0\ ;\ 60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer $B(0)$ et $B(60)$.

On a $B(x) = -x^2 + 56x - 300$
La fonction C est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 56$; $c = -300$.
Comme le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif
Alors sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum

Les coordonnées du sommet est $\left(-\frac{b}{2a}\ ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ avec $-\frac{b}{2a} = -\frac{56}{2\times(-1)} = 28$

$B(28) = -28^2 + 56 \times 28 - 300 = 484$

Donc $S_B(20; 300)$

x	0		28		60
Variation de B			484		
	-300	↗		↘	-540

$B(0) = -0^2 + 56 \times 0 - 300$
$= -300$

$B(60) = -60^2 + 56 \times 60 - 300$
$= -540$

6. En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

D'après le tableau de variations,
On peut dire que le bénéfice maximal est donc de 484 euros, obtenu pour une production de 28 parapluies.

7. Sur le graphique de l'annexe, on a tracé C_C, la courbe représentative de la fonction des coûts C.
Construire C_R, la courbe représentative de la fonction des recettes R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.

8. Retrouver graphiquement le bénéfice maximal, sans tracer la courbe des bénéfices, juste à l'aide des courbes des coûts et des recettes. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.

Ce bénéfice maximal correspond à l'écart maximal entre la droite et la courbe des coûts Cf entre 4 et 50.

9. Construire C_B, la courbe représentative de la fonction des bénéfices B.