THEME : Correction

MILIEUX ET PARALLELES DANS UN TRIANGLE

CORRECTION(S) EXERCICES SERIE 2

Exercice :

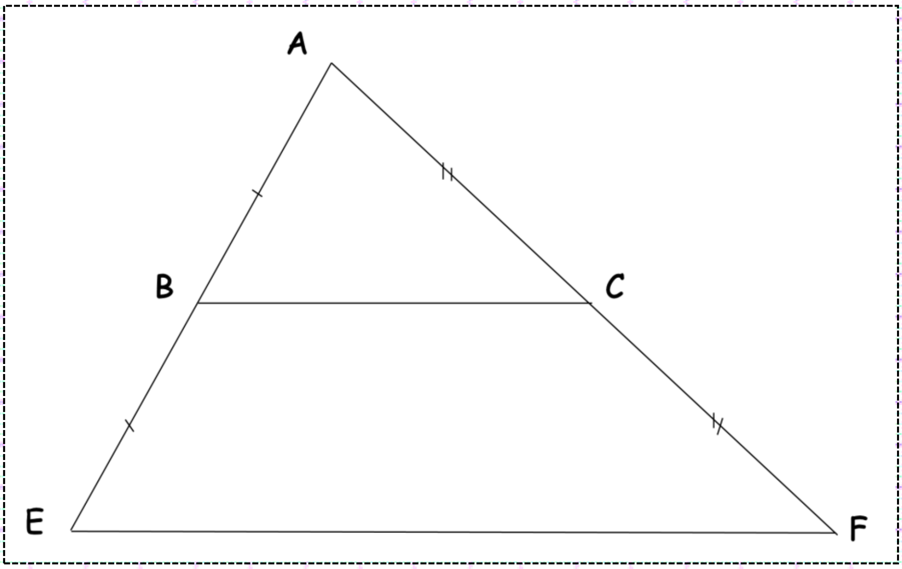
Soit ABC un triangle.

E est le symétrique de A par rapport à B et F est le symétrique de A par rapport à C.

a)Démontrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

b)Démontrer que $BC = \frac{1}{2} EF$

Correction :



a)Positions relatives des droites (BC) et (EF) :

Dans le triangle AEF,

▷ B milieu de [AE] (E symétrique de A par rapport à B)

▷ C milieu de [AF] (F symétrique de A par rapport à C)

donc, d'après le théorème des milieux, les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

$\boxed{(BC) \parallel (EF)}$

b) Calcul de BC :

Dans le triangle AEF,

▷ B milieu de [AE] (E symétrique de A par rapport à B)

▷ C milieu de [AF] (F symétrique de A par rapport à C) donc, $\boxed{BC = \frac{1}{2}EF}$

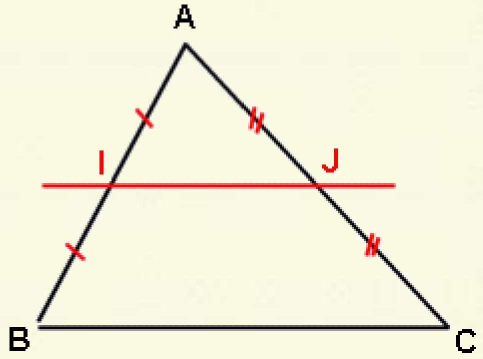
Rappel

Supplément du théorème des milieux

Soit ABC un triangle.
Soit I le milieu de [AB].
Si J est le milieu de [AC],
alors

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

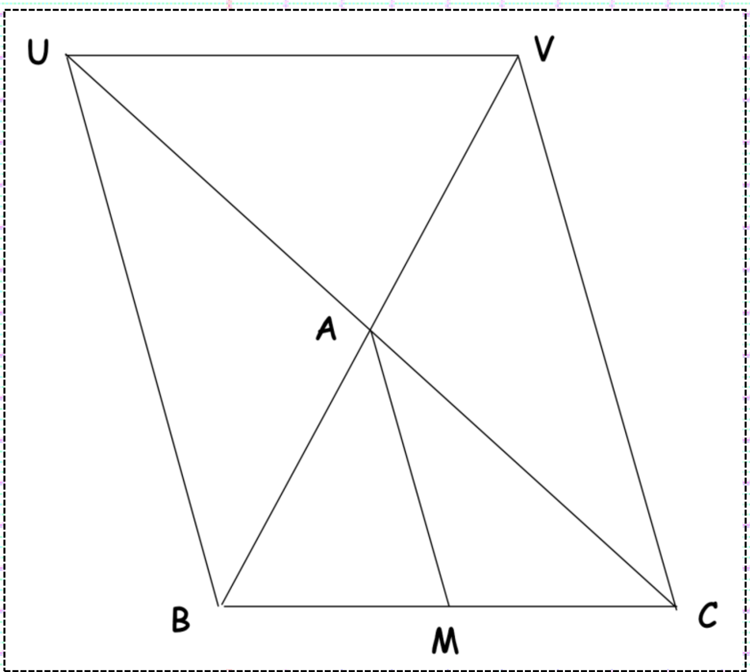
Dans un triangle, le segment qui joint les milieux de deux côtés a pour longueur la moitié de la longueur du troisième côté.



▶ *Exercice :*

Soit ABC un triangle et soit M le milieu de [BC].
La parallèle passant par B à la médiane issue de A rencontre (AC) en U.
La parallèle passant par C à la médiane issue de A rencontre (AB) en V.
Quelle est la nature du quadrilatère BUVC?

Correction :



Rappel : Une médiane est une droite (ou un segment) joignant un sommet d'un triangle au milieu du côté opposé.

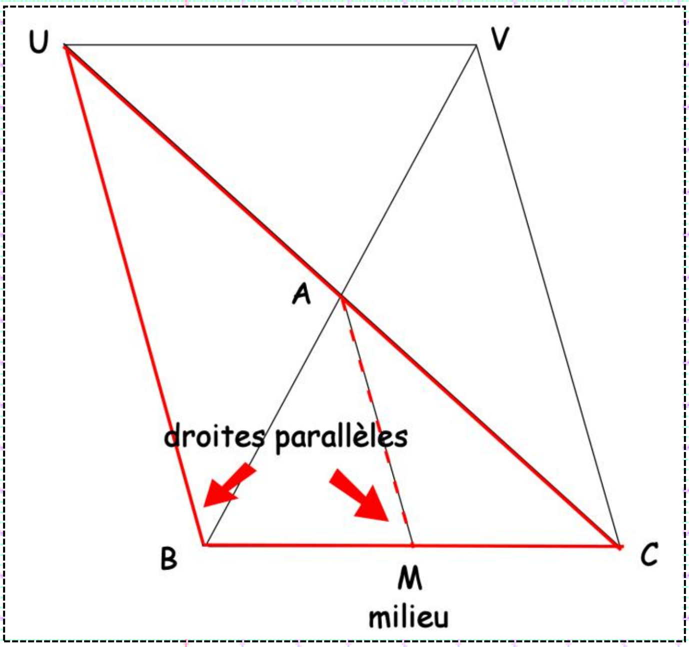
Le quadrilatère BUVC semble être un parallélogramme (Ceci n'étant qu'une supposition, qu'une conjecture)

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, nous disposons de deux outils :

UN QUADRILATERE EST UN PARALLELOGRAMME

- Il suffit de démontrer que les côtés opposés sont parallèles.
- Il suffit de démontrer que les diagonales ont même milieu.

La notion de parallélisme apparait dans le texte ("La parallèle passant "). Montrer que les côtés opposés sont parallèles semblerait être la solution à ce problème. Cette méthode n'est cependant pas celle que nous allons utiliser.
Nous allons démontrer que les diagonales ont même milieu (certainement le point A !)

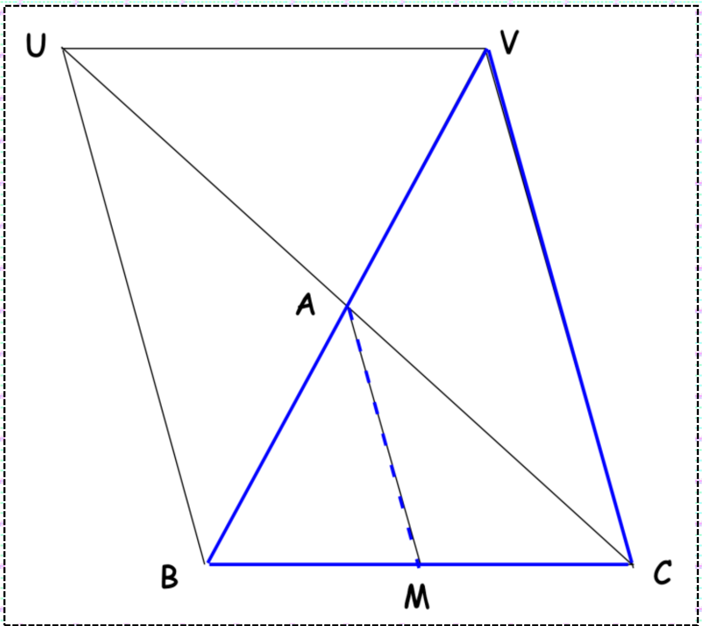


▷ Milieu de [UC] :

Dans le triangle BUC,
- ▷ M milieu de [BC] (hypothèse)
- ▷ (AM) || (BU) (hypothèse)

donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

A milieu de [UC]



▷ Milieu de [BV] :

Dans le triangle BVC,
- ▷ M milieu de [BC] (hypothèse)
- ▷ (AM) || (CV) (hypothèse)

donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

A milieu de [BV]

▷ Conclusion :

Dans le quadrilatère BUVC,
A milieu de [UC] (voir ci-dessus)
A milieu de [BV] (voir ci-dessus)
Les diagonales [UC] et [BV] ont même milieu A,
donc

BUVC est un parallélogramme

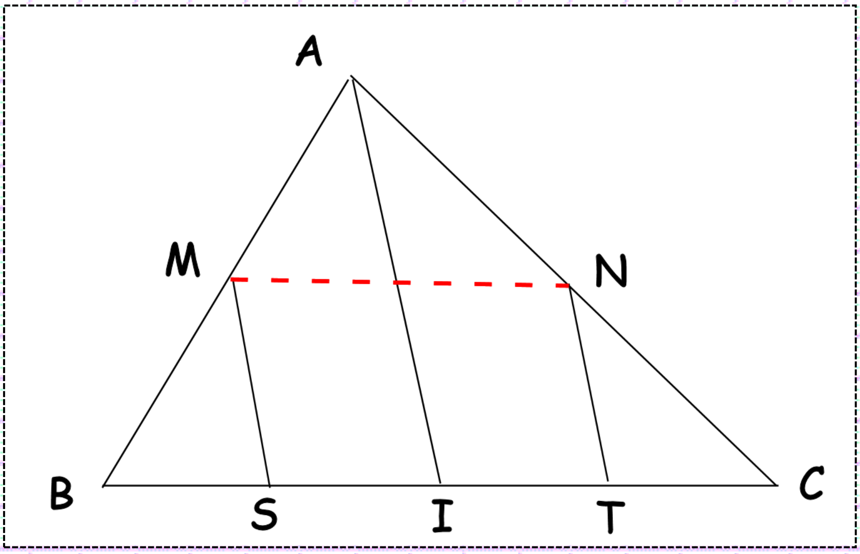
▶ *Exercice :*

On considère un triangle ABC et I le milieu de [BC] , S le milieu de [BI] et T le milieu de [IC] .
La parallèle à (AI) passant par S rencontre la droite (AB) en M et la parallèle à (AI) passant par T rencontre la droite (AC) en N .

a)Faire un dessin.

b)Que peut-on dire des droites (MN) et (BC)?

Correction :



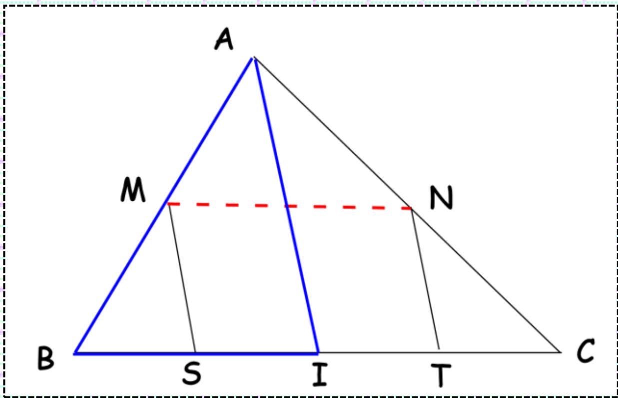
Recherche :

Le problème semble être simple.
En considérant le triangle ABC, nous avons :
M milieu de [AB]
N milieu de [AC]
donc, d'après le théorème des milieux, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Cette démonstration serait convenable s'il ne manquait pas certaines justifications. Le point M est-il réellement milieu de [AB] ? De même pour le point N.
Notre solution n'est donc pas satisfaisante et est donc à rejeter, à moins … de démontrer que M et N sont milieux respectifs de [AB] et [AC]. Il est à noter également que notre pseudo-démonstration ne fait pas appel aux points S, I et T et à leurs positions particulières !!!

Il est possible de démontrer que M est milieu de [AB] en utilisant la réciproque du théorème des milieux dans le triangle ABI. De même l'application de la réciproque du théorme des milieux dans le triangle AIC permettrait de démontrer que N est milieu de [AC].
Commençons donc par ces deux premières démonstrations avant de pouvoir réutiliser ce qui est écrit ci-dessus.

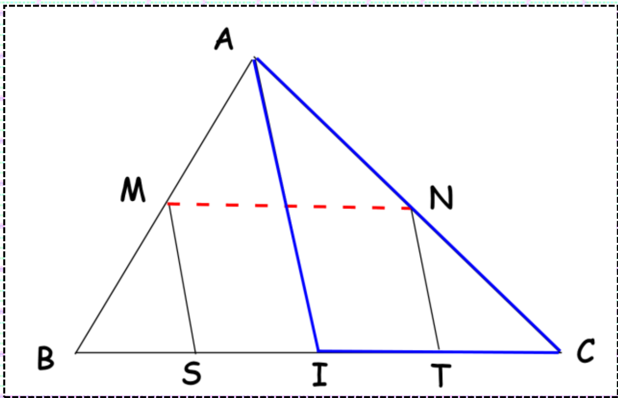
Rédaction :



▶ Milieu de [AB] :

Dans le triangle ABI,
▷ S milieu de [BI] (hypothèse)
▷ (MS) || (AI) (hypothèse)
donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

M milieu de [AB]



▶ Milieu de [AC] :

Dans le triangle ACI,
▷ T milieu de [CI] (hypothèse)
▷ (NT) || (AI) (hypothèse)
donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

N milieu de [AC]

▶ Conclusion :

Dans le triangle ABC,
M milieu de [AB] (voir ci-dessus)
N milieu de [AC] (voir ci-dessus)
donc, d'après le théorème des milieux, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarques :

▷ Très souvent, la résolution d'un problème se fait par ... la fin. Nous avions trouvé une démonstration "presque satisfaisante" . Il suffisait d'apporter quelques démonstrations liminaires (préalables) afin de justifier certaines conditions.

▷ Dans les exercices proposés en Collège, généralement toutes les connaissances apportées par le texte sont nécessaires. Ce qui permet souvent d'imaginer une démonstration en regardant les conditions non encore utilisées. Mais ce n'est pas toujours le cas. Ici, la position du point I sur [BC] est sans importance.

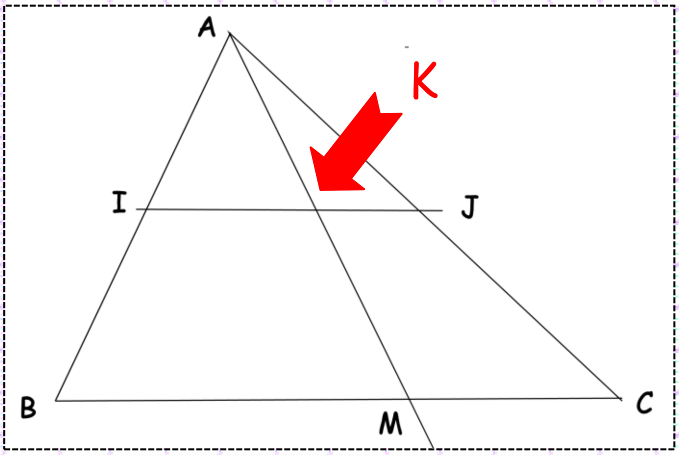
▶ *Exercice :*

Soit ABC un triangle. Soient I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
Soit M un point de [BC].
Démontrer que la droite (IJ) coupe le segment [AM] en son milieu.

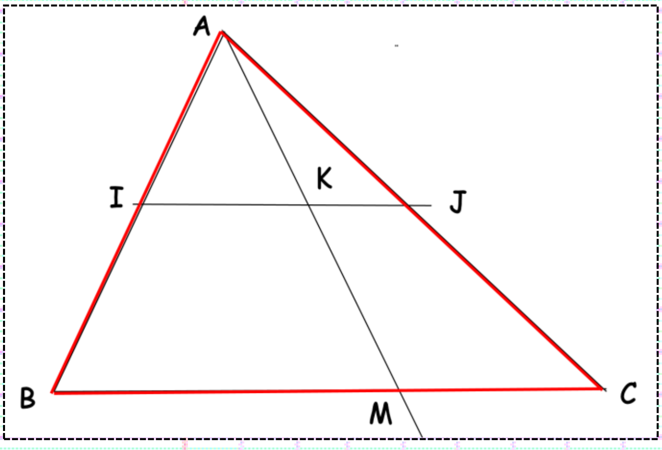
Correction :

Recherche :

Comme précédemment, en utilisant la réciproque du théorème des milieux dans le triangle ABM (par exemple), comme I est un milieu et que les droites (IJ) et (BM) (ou (BC)) sont parallèles, le point que nous nommerons K est milieu de [AM].
Cette démonstration serait convenable si les droites (IJ) et (BC) étaient réellement parallèles.
Mais nous l'ignorons ... pour l'instant !



▷ Positions relatives des droites (IJ) et (BC) :



Dans le triangle ABC,
I milieu de [AB] (hypothèse)
J milieu de [AC] (hypothèse)

donc, d'après le théorème des milieux, les droites (IJ) et (BC) sont parallèles.

$\boxed{(IJ) \parallel (BC)}$

▷ Milieu de [AM] :

Dans le triangle ACM,

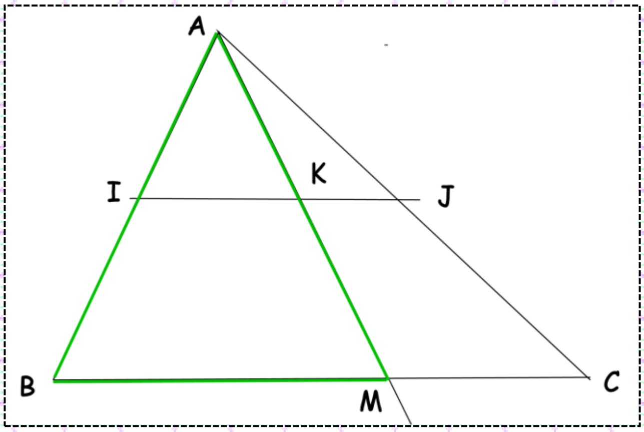
▷ I milieu de [AB] (hypothèse)

▷ (IJ) || (BC) (voir ci-dessus)

donc (IK) || (BM)

donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

K milieu de [AM]



La droite (IJ) coupe le segment [AM] en son milieu

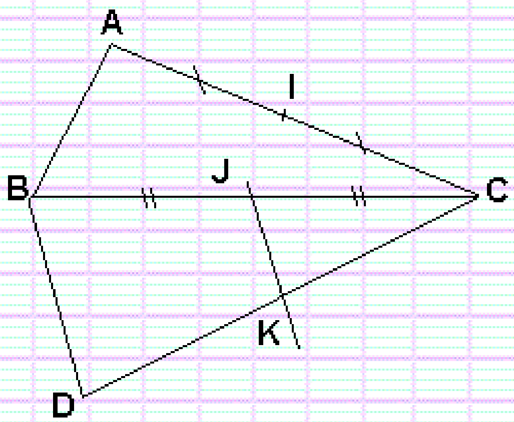
Remarque :

La même démonstration pouvait se faire sans donner de nom précis au point d'intersection des droites (IJ) et (AM) (le point K)

Exercice :

Sur la figure, I est le milieu de [AC] , J celui de [BC] et la droite (JK) est parallèle à (BD) .

Montrer que les droites (IK) et (AD) sont parallèles.



Correction :

Recherche :

Commençons la démonstration. L'outil que nous allons utiliser ici est le théorème des milieux qui permet connaissant deux milieux dans un triangle de démontrer que des droites sont parallèles.

Dans le triangle ADC,

I milieu de [AC] (hypothèse)

K milieu de [DC] (??????????????????)

donc, d'après le théorème des milieux, les droites (IK) et (AD) sont parallèles.

Nous pourrions donc commencer par démontrer que K est milieu de [DC]. A noter également que, dans notre rédaction, le point J et sa position particulière n'interviennent pas !!!!

Rédaction :

▷ Milieu de [DC] :

Dans le triangle CBD,

▷ J milieu de [BC] (hypothèse)

▷ (JK) || (BD) (hypothèse)

donc, d'après la réciproque du théorème des milieux,

K milieu de [DC]

▷ Positions relatives des droites (IK) et (AD) :

Dans le triangle ADC,
I milieu de [AC] (hypothèse)
K milieu de [DC] (voir ci-dessus)

donc, d'après le théorème des milieux, les droites (IK) et (AD) sont parallèles.

$\boxed{(IK) \parallel (AD)}$