THEME 8

DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE - EXERCICES CORRIGES SERIE 2

Exercice 11 :

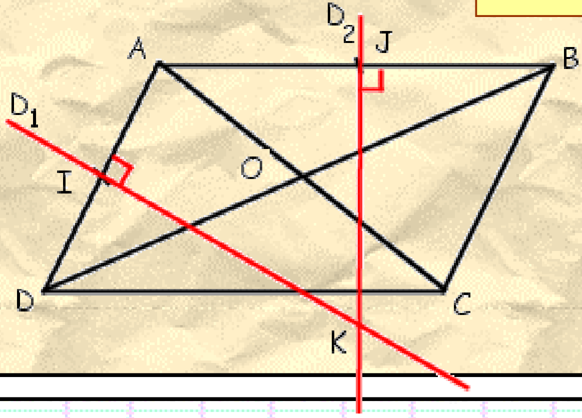
ABCD est un parallélogramme de centre O.
Soient I est le milieu de [AD] et J celui de [AB].
Soit D_1 la droite passant par I et perpendiculaire à [AD].
Soit D_2 la droite passant par J et perpendiculaire à [AB].
Les deux droites D_1 et D_2 se coupent en K.
Que peut-on dire des droites (OK) et (BD) ? (**Aide** : Utiliser le triangle ABD)

Solution :

COMMANDEMENT N°1 :

Toujours faire un dessin.

Un dessin vaut mieux qu'un long discours



Définition :

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par le milieu du segment.

Position des droites (OK) et (BD) :

Dans le triangle ADB :

D_1 passe par le milieu du côté [AD] (hypothèse)
D_1 est perpendiculaire à (AD) (hypothèse)
Donc D_1 est la médiatrice de [AD]

Dans le triangle ADB :

D_2 passe par le milieu du côté [AB] (hypothèse)

D_2 est perpendiculaire à (AB) (hypothèse)

Donc $\boxed{D_2 \text{ est la médiatrice de } [AB]}$

Ces deux médiatrices D_1 et D_2 se coupent en K. Donc K est le centre du cercle circonscrit (point de rencontre des médiatrices) au triangle ABD .

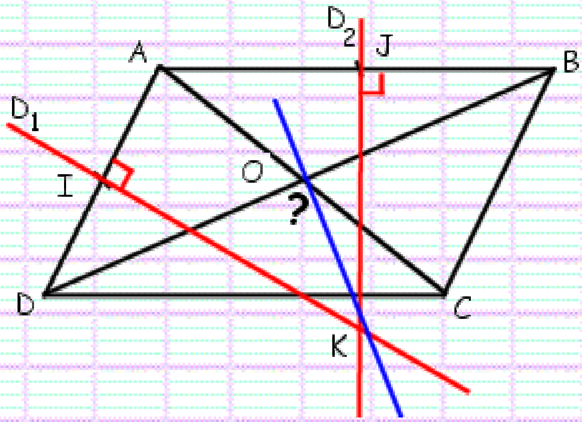
La troisième médiatrice de ce triangle passe par le milieu du troisième côté [BD] et par le point de rencontre des médiatrices K.

Or O est milieu de [BD] (O est le centre du parallélogramme ABCD et donc milieu des diagonales)

Donc (OK) est la médiatrice du côté [BD].

Par définition de la médiatrice

$$\boxed{(OK) \perp (BD)}$$



<u>Autre rédaction</u>

K est le centre du cercle circonscrit. (les médiatrices D_1 et D_2 se coupent en K)

O est le milieu de [BD] (O est le centre du parallélogramme ABCD)

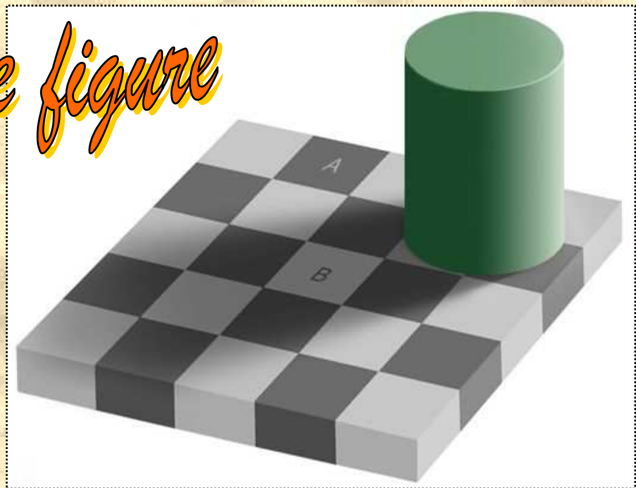
Donc (OK) est la médiatrice du côté [BD]

Par définition de la médiatrice $(OK) \perp (BD)$

Se méfier d'une figure

<u>Constante de taille :</u>
Le grand monstre court-il après le petit monstre ?

Le carré du damier dans lequel est inscrit A est-il du même gris que celui où est inscrit B ?



Réponses : NON - OUI

Exercice 12 :

Soient A et B deux points . Soit D une droite perpendiculaire à la droite (AB). Considérons sur cette droite un point O.

La perpendiculaire à la droite (OB) passant par A coupe (OB) en A'. Soit H le point d'intersection de la droite (AA') avec la droite D.

Démontrer que les droites (OA) et (BH) sont perpendiculaires.

Solution :

Dans le triangle OAB :

- ▷ O est un sommet
- ▷ $(OH) \perp (AB)$ (hypothèse – la droite D est perpendiculaire à (AB))

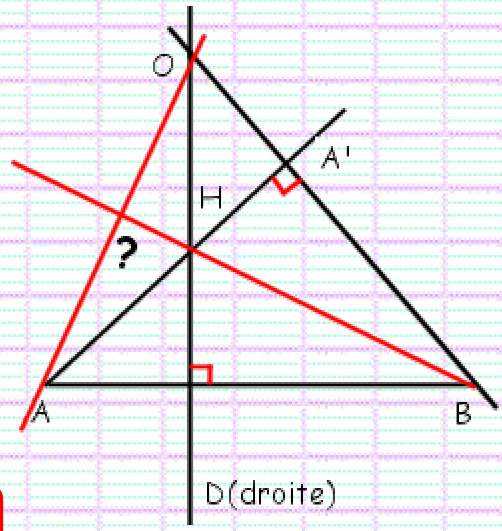
donc

(OH) est la hauteur issue de O

- ▷ A est un sommet
- ▷ $(AA') \perp (OB)$ (hypothèse)

donc

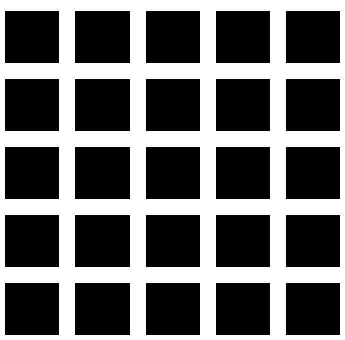
(AA') est la hauteur issue de A



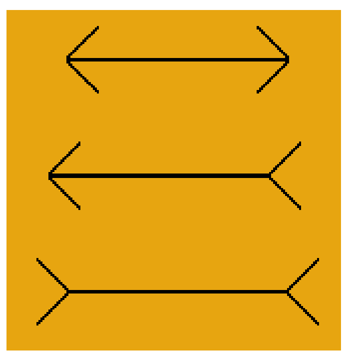
Les deux hauteurs (OH) et (AA') se coupent en H, donc H est l'orthocentre (point de rencontre des hauteurs d'un triangle).
La troisième hauteur de ce triangle passe par le troisième sommet B et par ce point de rencontre H.
Donc (HB) est la hauteur issue de B.

Par définition de la hauteur, la droite (HB) est perpendiculaire au côté [AO]

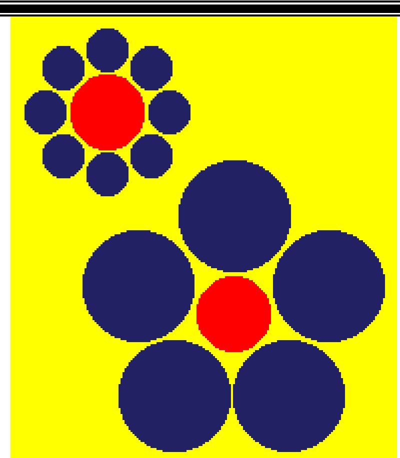
Les droites (OA) et (BH) sont perpendiculaires



Que voyez-vous entre les carrés ? Du gris ?



Quelle est le plus long des segments ?



Quel « rond » rouge est plus gros ? Celui du haut ?

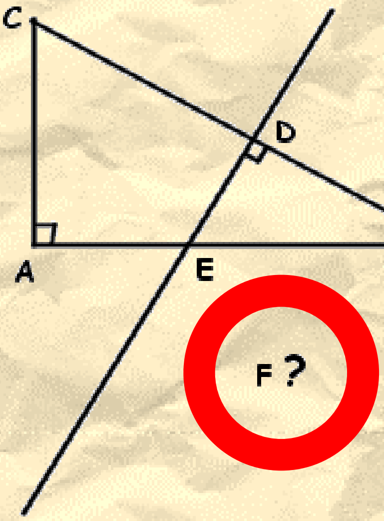
Exercice 13 :

Soit ABC un triangle rectangle en A.

Une droite perpendiculaire à l'hypoténuse de ce triangle coupe la droite (BC) en D , la droite (AB) en E et la droite (AC) en F .

Démontrer que les droites (CE) et (BF) sont perpendiculaires.

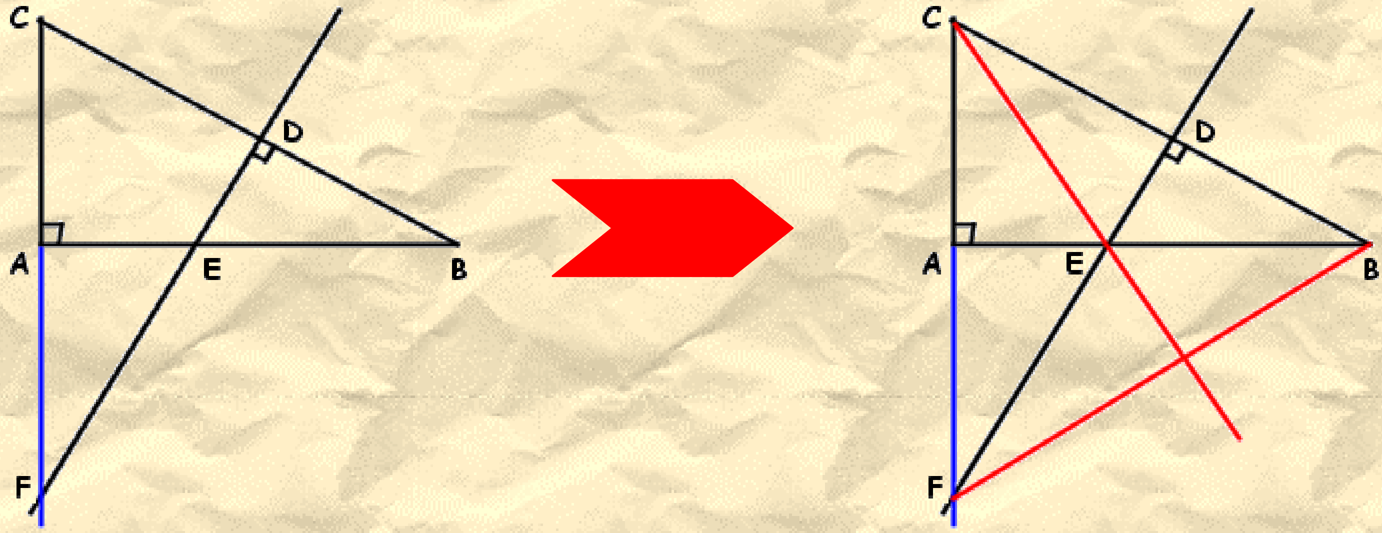
Solution :



Mais la droite perpendiculaire à l'hypoténuse ne coupe pas le côté [AC] ????

Tout d'abord, je ne peux que vous encouragez à mettre sur le dessin les symboles de perpendicularité (petits carrés représentant les angles droits). Ils seront utiles dans la démonstration.

Maintenant, vous confondez segment et droite. Dans le texte on précise que la perpendiculaire à l'hypoténuse coupe , non pas le segment [AC] en F , mais <u>la droite</u> (AC)



Dans le triangle CFB :

▶ <u>Nature de la droite (AB) :</u>

B est un sommet.

$(AB) \perp (AC)$ (ABC est un triangle rectangle) et donc $(AB) \perp (AF)$

donc

la droite (BA) est la hauteur issue de B.

▶ <u>Nature de la droite (FD) :</u>

F est un sommet.

$(FD) \perp (BC)$ (hypothèse)

donc

la droite (FD) est la hauteur issue de F.

▶ <u>Nature de la droite (CE) :</u>

Les deux hauteurs (BA) et (FD) se coupent en E, donc E est l'orthocentre du triangle (les trois hauteurs du triangle sont concourantes en ce point).

La droite (CE) passe par le sommet C et par l'orthocentre E,

donc

la droite (CE) est la hauteur issue de C.

▶ <u>Conclusion :</u>

La droite (CE) est la hauteur issue de C. Par conséquent, elle est perpendiculaire au côté opposé à C, c'est-à-dire [BF]

Les droites (CE) et (BF) sont perpendiculaires.