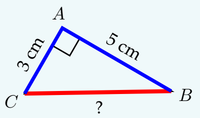
Notions pour le brevet

Classes de 3$^{\text{èmes}}$ de M. LENZEN

Pythagore

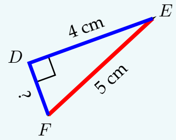
Théorème direct → permet de calculer une longueur dans un triangle rectangle



D : Le triangle ABC est rectangle en A.

P : D'après le théorème de Pythagore, on a :

C : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 5^2 + 3^2 = 34$
$BC = \sqrt{34} \approx 5{,}8$ cm.



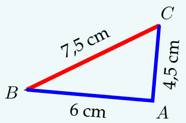
D : Le triangle DEF est rectangle en D.

P : D'après le théorème de Pythagore, on a :

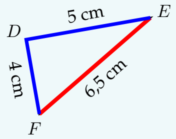
C : $EF^2 = DE^2 + DF^2$
$DF^2 = 5^2 - 4^2 = 9$
$DF = \sqrt{9} = 3$ cm.

Réciproque/contraposée → permet de prouver qu'un triangle est ou n'est pas rectangle

On calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés.



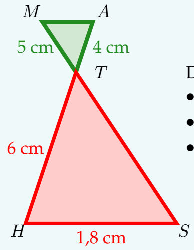
Ici $BC^2 = 7{,}5^2 = 56{,}25$, et
$AB^2 + AC^2 = 6^2 + 4{,}5^2 = 56{,}25$
⇒ égalité vraie ⇒ réciproque
⇒ ABC rectangle en A.



Ici $EF^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$, et
$DE^2 + DF^2 = 5^2 + 4^2 = 41$
⇒ égalité fausse ⇒ contraposée
⇒ ABC n'est pas rectangle !

Théorème de Thalès

→ permet de calculer une longueur



Données :
- M,T et S sont alignés
- A,T et H sont alignés
- $(MA) \,//\, (HS)$

D : Les droites (MS) et (AH) sont sécantes en T.
Les droites (AM) et (HS) sont parallèles.

P : D'après le théorème de Thalès, on a :

C : $\dfrac{TM}{TS} = \dfrac{TA}{TH} = \dfrac{MA}{HS}$
$\dfrac{5}{TS} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{MA}{1{,}8}$.

Calcul de TS :
$TS = \dfrac{5 \times 6}{4}$
$TS = \dfrac{30}{4} = 7{,}5$ cm

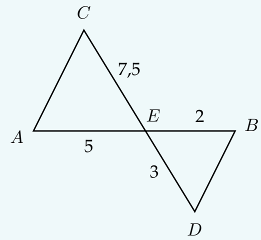
Calcul de MA :
$MA = \dfrac{4 \times 1{,}8}{6}$
$MA = \dfrac{7{,}2}{6} = 1{,}2$ cm

→ triangles semblables *(voir au verso)*

Dans une configuration de Thalès, les triangles rouge et vert sont toujours semblables. Le rapport de deux côtés homologues donne le coefficient d'agrandissement, ici $\frac{6}{4} = 1{,}5$ (agrandissement : coefficient $\geqslant 1$ / réduction : coefficient $\leqslant 1$).

Réciproque/contraposée du théorème de Thalès

Réciproque → permet de prouver que deux droites sont parallèles



D : L'égalité à tester est $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{ED}{EC}$:
- ◇ $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$
- ◇ $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{3}{7{,}5} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

L'égalité est donc **vraie**.

P : D'après la **réciproque** du théorème de Thalès, on a :

C : Les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

Contraposée → permet de prouver que deux droites ne sont pas parallèles

Dans la rédaction précédente, si les deux fractions n'avaient pas donné le même résultat, alors on aurait simplement transformé un peu le schéma « DPC » :

D : (…) L'égalité est donc **fausse**.

P : D'après la **contraposée** du théorème de Thalès, on a :

C : Les droites (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

Expressions littérales et calcul littéral

→ savoir calculer une expression littérale

Par exemple, le volume d'un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 5 cm est égal à $\mathscr{V} = \pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi \approx 141$ cm³.

→ savoir résoudre une équation

◇ Équations basiques :

$$\begin{aligned} \frac{x}{7} &= \frac{30}{105} \\ x &= \frac{7 \times 30}{105} \\ x &= \frac{210}{105} = 2. \\ \mathscr{S} &= \{2\}. \end{aligned}$$
(produit en croix)

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 7 \\ 3x - 5 + 5 &= 7 + 5 \\ 3x &= 12 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{12}{3} \\ x &= 4. \\ \mathscr{S} &= \{4\}. \end{aligned}$$
(principes de la balance)

◇ Équation "produit nul" : « Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul ». Par exemple : $(2x+5)(x-3) = 0$ donnera les deux équations basiques "$2x + 5 = 0$ ou $x - 3 = 0$".

→ savoir développer et réduire

$$\begin{aligned} k(a+b) &= k \times a + k \times b \\ (a+b)(c+d) &= a \times c + a \times d + b \times c + b \times d \end{aligned}$$

Exemples :
- ▷ $5(x-4) = 5 \times x - 5 \times 4 = 5x - 20$,
- ▷ $(7x-5)(2x-3) = 7x \times 2x - 7x \times 3 - 5 \times 2x + (-5) \times (-3) = 14x^2 - 31x + 15$.

→ connaître les identités remarquables

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 & \text{(I.R. ❶)} \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 & \text{(I.R. ❷)} \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 & \text{(I.R. ❸)} \end{aligned}$$

→ savoir résoudre une inéquation

ATTENTION : si on divise (ou multiplie) les deux membres d'une égalité par un nombre <u>négatif</u>, alors il faut changer le sens de l'inégalité !

$$\begin{aligned} -5x &\leqslant 24 + 7x \\ -5x - 7x &\leqslant 24 \\ -12x &\leqslant 24 \\ x &\geqslant \frac{24}{-12} \\ x &\geqslant -2 \end{aligned}$$

Puissances

a,b désignent deux nombres quelconques, et n,p deux entiers relatifs.

✧ Défintiion : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

✧ Défintiion : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}}$

✧ $a^n \times a^p = a^{n+p}$ ✧ $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

✧ $(a^n)^p = a^{n \times p}$ ✧ $a^n \times b^n = (ab)^n$

Aires & volumes

$\mathscr{A}$(■) $= \mathbf{c^2}$

$\mathscr{A}$(▭) $= L \times \ell$

$\mathscr{A}$(◺) $= \dfrac{b \times h}{2}$

$\mathscr{A}$(◉) $= \pi \times R^2$

$\mathscr{A}$(◑) $= 4\pi \times R^2$ (sphère)

Volume des solides sans pointe :
$\mathscr{V} = \mathscr{A}_{\text{base}} \times$ hauteur.

Volume des solides avec pointe :
$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A}_{\text{base}} \times$ hauteur.

Volume d'une boule :
$\mathscr{V}_{\text{boule}} = \dfrac{4}{3}\pi \times R^3$.

Dans un agrandissement (ou une réduction) de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

Calculs

✧ Ordre des priorités :

$\boxed{(\ \ )} \Longrightarrow \boxed{\times\ /\ \div} \Longrightarrow \boxed{+\ /\ -}$

(les flèches dans les cases signifient qu'on calcule de gauche à droite, **dans le sens de lecture du calcul**, les expressions ne contenant **que** des $\times$ et $\div$ (ou encore des $+$ et $-$).

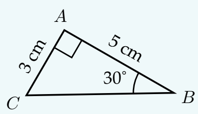
✧ "Diviser par une fraction revient exactement à multiplier par son inverse" :
$\dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{7} \div \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{2}{7} \times \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{6} - \dfrac{8}{21} = \dfrac{35}{42} - \dfrac{16}{42} = \dfrac{19}{42}$.

Trigonométrie

Les relations de trigonométrie ne sont valables que dans un triangle **rectangle** !

CAH - SOH - TOA

$\left(\text{Cos} = \dfrac{\text{Adj}}{\text{Hypo}} \quad \text{Sin} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Hypo}} \quad \text{Tan} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Adj}} \right)$



D : Le triangle ABC est rectangle en A.
P : D'après la trigonométrie, on a :
C : $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\text{adj}}{\text{hypo}} = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow \cos(30°) = \dfrac{5}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{1 \times 5}{\cos(30°)} \approx 5{,}\underline{8}$ cm.

D : Le triangle ABC est rectangle en A.
P : D'après la trigonométrie, on a :
C : $\tan \widehat{ACB} = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow \widehat{ACB} = \tan^{-1}\left(\dfrac{5}{3}\right) \approx 59°$.

Probabilités

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas réalisant } A}{\text{nombre total de cas}}.$$

Exemples sur un jeu de 32 cartes :
$p(\text{tirer un roi}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ / $p(\text{obtenir une figure } \clubsuit) = \dfrac{3}{32}$ / $p(\text{tirer l'as de } \heartsuit) = \dfrac{1}{32}$.

Racines carrés

$\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$;
$\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$ et $\sqrt{100} = 10$.

Bonus :
- $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$ et $\sqrt{169} = 13$.
- Une racine carré et un carré s'annule : $\sqrt{5}^2 = 5$ et $\sqrt{5^2} = 5$.

Arithmétique

- 21 est divisible par 3 car $21 = 3 \times 7 + 0 \rightarrow$ reste $= 0$!
- 21 n'est pas divisible par 4 car $21 = 4 \times 5 + 1$.
- Un nombre est **premier** lorsqu'il est divisible par exactement deux nombres : 1 et lui-même.
  Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ... (la liste est infinie).
- Pour décomposer 252 en **produit de facteurs premiers**, on détermine ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant (en veillant bien à "épuiser" chaque diviseur premier au maximum).
  Exemples : $252 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^2 \times 7$, *et* $30 = 2 \times 3 \times 5$.
- Pour rendre une fraction **irréductible**, on décompose ses numérateur et dénominateur en produits de facteurs premiers et on simplifie par les facteurs communs.
  Exemple : $\dfrac{30}{252} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \dfrac{5}{2 \times 3 \times 7} = \dfrac{5}{42}$.

Pourcentages

$\rightarrow$ savoir appliquer un pourcentage

« 75% des 24 élèves de 3ᵉ6 ont un téléphone » signifie que sur 100 élèves, 75 en ont un.
$\dfrac{75}{100} \times 24 = 18 \Rightarrow$ 18 élèves ont un téléphone.

$\rightarrow$ savoir augmenter ou diminuer

Un bijou affiché 79€€ est soldé à -20%.
Remise : $\dfrac{20}{100} \times 79 = 15{,}80$ €$\Rightarrow$ prix soldé : $79 - 15{,}80 = 63{,}20$ €.

$\rightarrow$ savoir calculer un pourcentage

« Dans un collège de 600 élèves, 126 sont en 3ᵉ » signifie que 126 élèves sur 600 sont en troisième (donne une proportion, donc un nombre $\leqslant 1$).
$\dfrac{126}{600} \times 100 = 21 \Rightarrow$ 21% des élèves sont en 3ᵉ.

Notions de fonction

$\rightarrow$ connaître la notion de fonction et le vocabulaire

nombre de départ / x / un antécédent / abscisse $\longmapsto$ **fonction f** $\longrightarrow$ nombre d'arrivée / $f(x)$ ou y / l'image / ordonnée

- Une fonction **affine** est de la forme $f : x \mapsto ax + b$, avec a le **cœfficient directeur** et b l'**ordonnée à l'origine**.
- Une fonction **linéaire** est de la forme $f : x \mapsto ax$ (= proportionnalité)
- Une fonction **constante** est de la forme $f : x \mapsto b$.

$\rightarrow$ savoir calculer/déterminer une image ou un antécédent

- *À partir d'une expression :*

Calcul d'image (= substitution)

Soit $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
Calculer $f(2)$ et $f(-3)$.

- $f(2) = 2 \times 2^2 - 4 \times 2 + 5 = 8 - 8 + 5 = 5$.
  L'image de 2 par la fonction f est 5.
- $f(-3) = 2 \times (-3)^2 - 4 \times (-3) + 5 = 18 + 12 + 5 = 35$.
  L'image de -3 par la fonction f est 35.
- ***Quand on remplace x par un nombre négatif, on l'entoure de parenthèses.***

Calcul d'antécédent (= équation)

Soit $f(x) = 5x - 3$. Calculer l'antécédent de 2 par la fonction f.
On cherche donc x tel que $f(x) = 2$, d'où

$$\begin{aligned} 5x - 3 &= 2 \\ 5x - 3 + 3 &= 2 + 3 \\ 5x &= 5 \\ \frac{5x}{5} &= \frac{5}{5} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

L'antécédent de 2 par la fonction f est 1.

- *À partir d'un tableau :*

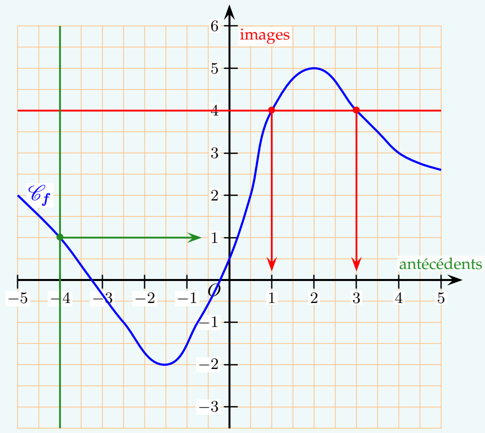
Voici le tableau de valeurs d'une fonction f :

x	-5	-2	0	1	4	5	6	10
$f(x)$	-3	-1	1	3	1	0	-2	0

Par cette fonction f, l'image de -5 est -3, et celle de 1 est 3.
L'antécédent de -1 est -2 et les antécédents de 0 sont 5 et 10.

- *À partir d'une représentation graphique :*

On considère la fonction f définie par la courbe suivante, on cherche les antécédents de 4 par f.



Par la fonction f, l'image de -4 est 1, et les antécédents de 4 sont 1 et 3.

- *Rappels :*
  - Un fonction n'est qu'une "machine" qui sert à transformer les nombres : on met un nombre dedans (un antécédent), la machine travaille, et c'est un autre nombre qui en ressort (l'image).
  - Quelle que soit la méthode utilisée, **l'image d'un nombre est unique** (quand on met un nombre dans la machine f, *un seul* nombre peut en sortir). Par contre, **un nombre peut admettre 0, 1 ou plusieurs antécédents** (0, 1 ou plusieurs nombres mis dans la machine peuvent donner le même résultat) !

Grandeurs

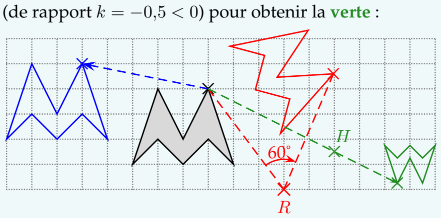
Volumes et capacités : **1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³**
1 m³ = 1 000 L.

Vitesses : km/h $\xrightarrow{\div 3{,}6}$ m/s et m/s $\xrightarrow{\times 3{,}6}$ km/h.

- Combien de litres d'eau pour remplir une piscine rectangulaire de 5 m par 4 m et de profondeur 1,5 m ?
  $\mathscr{V}_{\text{piscine}} = (5 \times 4) \times 1{,}5 = 30 \text{ m}^3 = 30\,000$ L.
- Un TGV fait 1 620 km en 5 heures. Sa vitesse vaut :
  $v = \dfrac{d}{t} = \dfrac{1\,620 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 324$ km/h $(= 324 \div 3{,}6 = 90$ m/s$)$.
- Un robinet a un débit de 1,5 m³/h (cela signifie que ce robinet laisse couler 1,5 m³ d'eau en 1 h). Quel est ce débit en L/min ?
  $1{,}5 \text{ m}^3/\text{h} = \dfrac{1{,}5 \text{ m}^3}{1 \text{ h}} = \dfrac{1\,500 \text{ L}}{60 \text{ min}} = 25$ L/min.

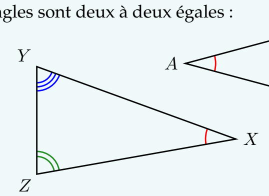
Transformations du plan

La figure de base est grisée. Elle a subi une **rotation** (de 60° dans le sens horaire) pour donner la figure **rouge**, une **translation** pour obtenir la **bleue** et une **homothétie** (de rapport $k = -0{,}5 < 0$) pour obtenir la **verte** :



Triangles semblables

Deux triangles sont **semblables** si les mesures de leurs angles sont deux à deux égales :



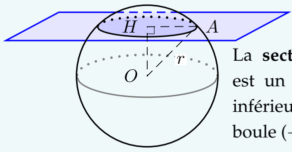
$\widehat{BAC} = \widehat{YXZ}$
$\widehat{ACB} = \widehat{XZY}$
$\widehat{ABC} = \widehat{XYZ}$

Quand deux triangles sont semblables, les angles de même mesure sont **homologues**, les côtés entre deux tels angles sont également **homologues** et les sommets en face de côtés homologues sont encore **homologues**.

- Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de mêmes mesures, alors ils sont semblables.
- Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles deux à deux.
- Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ils sont semblables.
- Deux triangles semblables qui ont en plus leurs côtés homologues de même mesure sont appelés des **triangles égaux**.

$\widehat{A}$ et $\widehat{X}$ étant homologues, on peut déplacer le petit triangle ABC "à l'intérieur" du grand triangle XYZ et ainsi former une configuration de Thalès, qui explique parfaitement le deuxième ✧ ci-dessus !

Section d'un solide par un plan



La **section d'une boule** est un disque de rayon inférieur à celui de la boule ($\rightarrow$ Pythagore)

La **section d'un pavé** est un rectangle ($\rightarrow$ Pythagore si le plan est parallèle à une arête).

La **section d'une pyramide** (ou d'un cône) parallèlement à la base est une réduction de la base ($\rightarrow$ Thalès).

Statistiques

Voici les 13 pointures des élèves d'une classe rangées par ordre *croissant* :
36 - 36 - 37 - 37 - 37 - 38 - 38 - 39 - 39 - 39 - 40 - 41 - 42.

- L'**effectif total** est $N = 13$ et la **fréquence** de la pointure 39 (par exemple) vaut $\dfrac{3}{13} \approx 0{,}23$ (ou 23%) : il y a 3 pointures 39 sur 13 en tout.
- La **moyenne** vaut $\overline{m} = \dfrac{36 + \cdots + 42}{13} = \dfrac{499}{13} \approx 38{,}\underline{4}$.
- L'**étendue** vaut $E = 42 - 36 = 6$.
- La **médiane** M partage la série ***triée*** en 2 groupes de *même* effectif.
  - si N est impair : $N = 13 \Rightarrow N/2 = 6{,}5 \approx 7$, donc M est la 7ᵉ valeur de la série : $M = 38$.
  - si N est pair (supposons un 42 de plus) : alors $N = 14 \Rightarrow N/2 = 7$, donc M est "au milieu" de la 7ᵉ valeur et la suivante : $M = 38{,}5$.

Remerciements

Fiche écrite en LaTeX, largement inspirée de celle de Pascal DORR du collège de Terre-Sainte, disponible sur www.maths974.fr.