PROBABILITES - FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Exercice 1

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note les événements :

- P : « La carte tirée est un pique »;
- T : « La carte tirée est un trèfle »;
- C : « La carte tirée est un cœur »;
- R : « La carte tirée est un roi »;
- D : « La carte tirée est une dame »;
- N : « La carte tirée est un 7, un 8, un 9 ou un 10. »

1) Décrire les événements suivants à l'aide d'une phrase :
   - $\bar{T}$ ………………………………………………………………………………
   - $\bar{D}$ ………………………………………………………………………………
   - $P \cap D$ ……………………………………………………………………
   - $T \cap R$ ……………………………………………………………………
   - $P \cup T$ ……………………………………………………………………
   - $R \cup D$ ……………………………………………………………………
   - $\bar{T} \cup D$ ……………………………………………………………………

2) Écrire les événements suivants à l'aide des événements P, T, C, R, D et N.
   a. « La carte tirée n'est pas un cœur. » ………………
   b. « La carte tirée est une dame ou un roi. » ………………
   c. « La carte tirée n'est pas un nombre. » ………………
   d. « La carte tirée est une dame différente de la dame de pique. » ………………
   e. « La carte tirée est le roi de cœur. » ………………
   f. « La carte tirée est un roi différent du roi de pique. » ………………
   g. « La carte tirée n'est ni une dame, ni un trèfle. » ………………

Exercice 2

Dans un lycée de 1 200 élèves, il y a 700 filles et 500 élèves en seconde, dont 300 filles.
On choisit au hasard un élève du lycée.

Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

- F : « L'élève choisi est une fille »;

- S : « L'élève choisi un élève de seconde »;

- C : « L'élève choisi est une fille ou un élève de seconde ».

Exercice 3

Une urne contient 3 boules, une noire, une blanche et une rouge. On tire au hasard une boule au hasard. On note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire de nouveau hasard une boule dont on note la couleur. On représente un tirage par un couple dont le premier élément est la première boule tirée et le second élément, la deuxième boule tirée.
Les probabilités seront exprimées à l'aide de fractions irréductibles puis arrondies au centième.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité de ne piocher aucune boule blanche ?

3) Quelle est la probabilité de piocher au moins une boule blanche ?

4) Quelle est la probabilité de piocher deux boules de même couleur ?

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2 + \frac{3}{x-5}$ et $g(x) = 3 - \frac{x}{x-7}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et g

2) Démontrer que ces fonctions sont des fonctions homographiques.

3) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$

Exercice 5

1) Soit f la fonction définie $par\ f(x) = -\frac{3}{x-2}$ pour tout réel x où cette formule a un sens.

   a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

   b. Établir le sens de variations de f.

2) Mêmes questions avec $f(x) = \frac{5}{3-2x}$

3) Mêmes questions avec $f(x) = 2 - \frac{1}{4x+5}$.

PROBABILITES - FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Exercice 1

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On note les événements :

- **P : « La carte tirée est un pique »;**
- **T : « La carte tirée est un trèfle »;**
- **C : « La carte tirée est un cœur »;**
- **R : « La carte tirée est un roi »;**
- **D : « La carte tirée est une dame »;**
- **N : « La carte tirée est un 7, un 8, un 9 ou un 10. »**

1. $\overline{T}$: » La carte tirée n'est pas un trèfle ».
   $\overline{D}$: » La carte tirée n'est pas une dame ».
   $P \cap D$: » La carte tirée est la dame de pique ».
   $T \cap R$: » La carte tirée est le roi de trèfle ».
   $P \cup T$: » La carte tirée est un pique ou un trèfle ».
   $R \cup D$: » La carte tirée est un roi ou une dame ».
   $\overline{T} \cup D$: » La carte tirée n'est pas un trèfle ou est une dame ».

2. **a.** « La carte tirée n'est pas un cœur. » : $\overline{C}$
   b. « La carte tirée est une dame ou un roi. » : $D \cup R$
   c. « La carte tirée n'est pas un nombre. » : N
   d. « La carte tirée est une dame différente de la dame de pique. » : $D \cap \overline{P}$
   e. « La carte tirée est le roi de cœur. » : $R \cap C$
   f. « La carte tirée est un roi différent du roi de pique. » $R \cap \overline{P}$
   g. « La carte tirée n'est ni une dame, ni un trèfle. » : $\overline{D \cup T}$

Exercice 2

Dans un lycée de 1 200 élèves, il y a 700 filles et 500 élèves en seconde, dont 300 filles.
On choisit au hasard un élève du lycée.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

• F : « L'élève choisi est une fille »;

• S : « L'élève choisi un élève de seconde »;

• C : « L'élève choisi est une fille ou un élève de seconde ».

$$p(F) = \frac{700}{1\,200} = \frac{7}{12}$$

$$p(S) = \frac{500}{1\,200} = \frac{5}{12}$$

$$\begin{aligned} p(C) &= p(S) + p(F) - p(S \cap F) \\ &= \frac{7}{12} + \frac{5}{12} - \frac{300}{1\,200} \\ &= \frac{7}{12} + \frac{5}{12} - \frac{3}{12} \\ &= \frac{9}{12} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exercice 3

Une urne contient 3 boules, une noire, une blanche et une rouge. On tire au hasard une boule au hasard. On note sa couleur, on la remet dans l'urne puis on tire de nouveau hasard une boule dont on note la couleur. On représente un tirage par un couple dont le premier élément est la première boule tirée et le second élément, la deuxième boule tirée.
Les probabilités seront exprimées à l'aide de fractions irréductibles puis arrondies au centième.

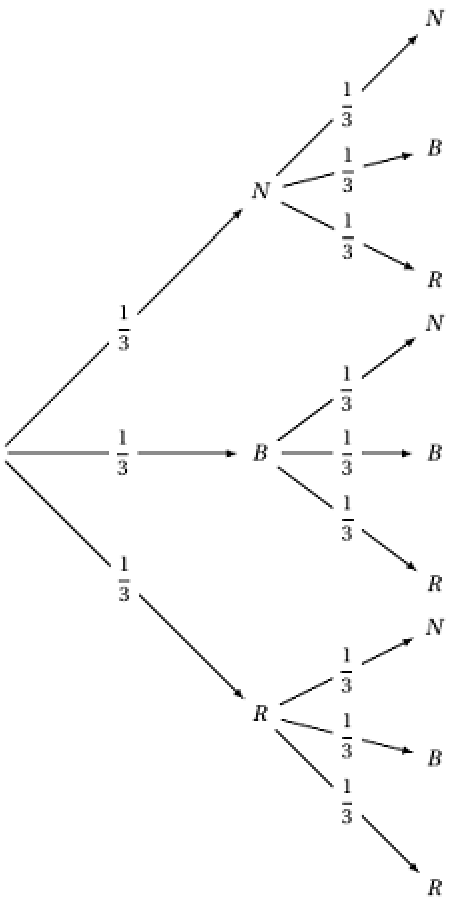
1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité de ne piocher aucune boule blanche ?

3) Quelle est la probabilité de piocher au moins une boule blanche ?

4) Quelle est la probabilité de piocher deux boules de même couleur ?

1. On appelle :
   - N l'événement « tirer une boule noire »
   - B l'événement « tirer une boule blanche »
   - R l'événement « tirer une boule rouge »



2. Il y a quatre tirages sans boules blanches.

   Ainsi la probabilités cherchée est de $\dfrac{4}{9}$.

3. Il y a six tirages qui contiennent au moins une boule blanche.

   Ainsi la probabilité cherchée est de $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

4. Trois tirages ne contiennent que des boules de même couleur.

   La probabilité cherchée est de $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2 + \frac{3}{x-5}$ et $g(x) = 3 - \frac{x}{x-7}$

1) **Déterminer l'ensemble de définition de f et g**

2) **Démontrer que ces fonctions sont des fonctions homographiques.**

3) **Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$**

1. f est définie quand $x-5 \neq 0$. Par conséquent $\mathscr{D}_f =]-\infty; 5[\cup]5; +\infty[$.
   g est définie quand $x-7 \neq 0$. Par conséquent $\mathscr{D}_g =]-\infty; 7[\cup]7; +\infty[$.

2. $f(x) = \dfrac{2(x-5)+3}{x-5} = \dfrac{2x-10+3}{x-5} = \dfrac{2x-7}{x-5}$

   $g(x) = \dfrac{3(x-7)-x}{x-7} = \dfrac{3x-21-x}{x-7} = \dfrac{2x-21}{x-7}$

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dfrac{2x-7}{x-5} = \dfrac{x-21}{x-7}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-7}{x-5} - \frac{2x-21}{x-7} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-7)(x-7)}{(x-5)(x-7)} - \frac{(2x-21)(x-5)}{(x-7)(x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-14x-7x+49}{(x-5)(x-7)} - \frac{2x^2-10x-21x+105}{(x-7)(x-5)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10x-56}{(x-5)(x-7)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x-56 = 0 \text{ et } x \neq 5 \text{ et } x \neq 7$$

$$\Leftrightarrow x = 5,6$$

La solution de l'équation est donc $5,6$.

Exercice 5

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{3}{x-2}$ pour tout réel x où cette formule a un sens.

a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.

b. Établir le sens de variations de f.

1. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est défini ssi $x - 2 \neq 0$
ssi $x \neq 2$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

1. b. (Étude sur $]2; +\infty[$) Soient x et x' dans $]2; +\infty[$ tels que $x < x'$.

$$\begin{array}{ll}
2 < x < x' & \\
0 < x - 2 < x' - 2 & \\
\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{x'-2} & \text{car la fonction inverse est (strictement) décroissante sur }]0; +\infty[. \\
\dfrac{-3}{x-2} < \dfrac{-3}{x'-2} & \text{car } -3 > 0 \\
f(x) < f(x'). &
\end{array}$$

Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]2; +\infty[$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$.

(Étude sur $]-\infty; 2[$) Soient x et x' dans $]-\infty; 2[$ tels que $x < x'$.

$$\begin{array}{ll}
x < x' < 2 & \\
x - 2 < x' - 2 < 0 & \\
\dfrac{1}{x-2} > \dfrac{1}{x'-2} & \text{car la fonction inverse est (strictement) décroissante sur }]-\infty; 0[. \\
\dfrac{-3}{x-2} < \dfrac{-3}{x'-2} & \text{car } -3 > 0 \\
f(x) < f(x'). &
\end{array}$$

Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]-\infty; 2$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	‖	$\nearrow$	

2) Mêmes questions avec $f(x) = \frac{5}{3-2x}$

2. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est défini ssi $3-2x \neq 0$
ssi $-2x \neq -3$
ssi $x \neq 1.5$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 1.5[\cup]1.5; +\infty[$.

2. b. (Étude sur $]1.5; +\infty[$) Soient x et x' dans $]1.5; +\infty[$ tels que $x < x'$.

$1.5 < x < x'$

$0 = 3-2\times 1.5 > 3-2x > 3-2x'$ car $x \mapsto 3-2x$ est décroissante (coefficient directeur négatif)

$\frac{1}{3-2x} < \frac{1}{3-2x'}$ car la fonction inverse est (strictement) décroissante sur $]-\infty; 0[$.

$\frac{5}{x-2} < \frac{5}{x'-2}$ car $5 > 0$

$f(x) < f(x')$.

Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]1.5; +\infty[$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$.

(Étude sur $]-\infty; 1.5[$) Soient x et x' dans $]-\infty; 1.5[$ tels que $x < x'$.

$x < x' < 1.5$

$3-2x > 3-2x' > 3-2\times 1.5 = 0$ car $x \mapsto 3-2x$ est décroissante (coefficient directeur négatif)

$\frac{1}{3-2x} < \frac{1}{3-2x'}$ car la fonction inverse est (strictement) décroissante sur $]0; +\infty[$.

$\frac{5}{x-2} < \frac{5}{x'-2}$ car $5 > 0$

$f(x) < f(x')$.

Ainsi, f est (strictement) croissante sur $]-\infty; 1.5[$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$.

x	$-\infty$		1.5		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

3) Mêmes questions avec $f(x) = 2 - \frac{1}{4x+5}$.

3. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est défini ssi $4x + 5 \neq 0$
ssi $4x \neq -5$
ssi $x \neq -1.25$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; -1.25[\cup]-1.25; +\infty[$.

3. b. (Étude sur $]-1.25; +\infty[$) Soient x et x' dans $]-1.25; +\infty[$ tels que $x < x'$.

$-1.25 < x < x'$
$0 = 4 \times (-1.25) + 5 < 4x + 5 < 4x' + 5$ car $x \mapsto 4x + 5$ est strictement croissante (coefficient directeur positif)
$\dfrac{1}{4x+5} > \dfrac{1}{4x'+5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0; +'\infty[$
$\dfrac{-1}{4x+5} > \dfrac{-1}{4x'+5}$ car -1<0.
$2 + \dfrac{-1}{4x+5} > 2 + \dfrac{-1}{4x'+5}$
$f(x) > f(x')$.

Ainsi, f est (strictement) décroissante sur $]-1.25; +\infty[$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) < f(x')$.

(Étude sur $]-\infty; -1.25[$) Soient x et x' dans $]-1.25; +\infty[$ tels que $x < x'$.

$x < x' < 1.25$
$4x + 5 < 4x' + 5 < 4 \times (-1.25) + 5 = 0$ car $x \mapsto 4x + 5$ est strictement croissante (coefficient directeur positif)
$\dfrac{1}{4x+5} > \dfrac{1}{4x'+5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$
$\dfrac{-1}{4x+5} > \dfrac{-1}{4x'+5}$ car -1<0.
$2 + \dfrac{-1}{4x+5} > 2 + \dfrac{-1}{4x'+5}$
$f(x) > f(x')$.

Ainsi, f est (strictement) décroissante sur $]-\infty; -1.25[$, car sur cet intervalle, $x < x'$ entraîne $f(x) > f(x')$.

x	$-\infty$		-1.25		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	