DS 6 – 14 AVRIL 2016

Durée : 55 min **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

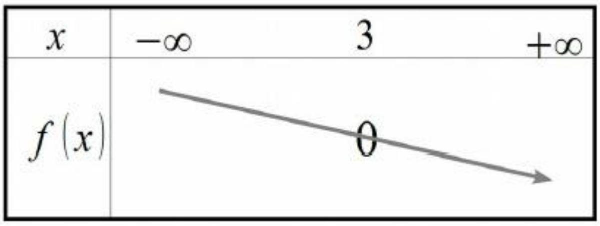
Bilan	Fonction	Fonction	Géométrie
	Ex 1	Ex 2	Ex 3
/ 20	/ 3	/ 9	/ 8

<u>Exercice 1</u> - 3 points - (sur le poly)

Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1) et 2), une seule réponse est correcte...laquelle ? Cocher la bonne réponse

1. Voici le tableau de variations d'une fonction .
Alors :

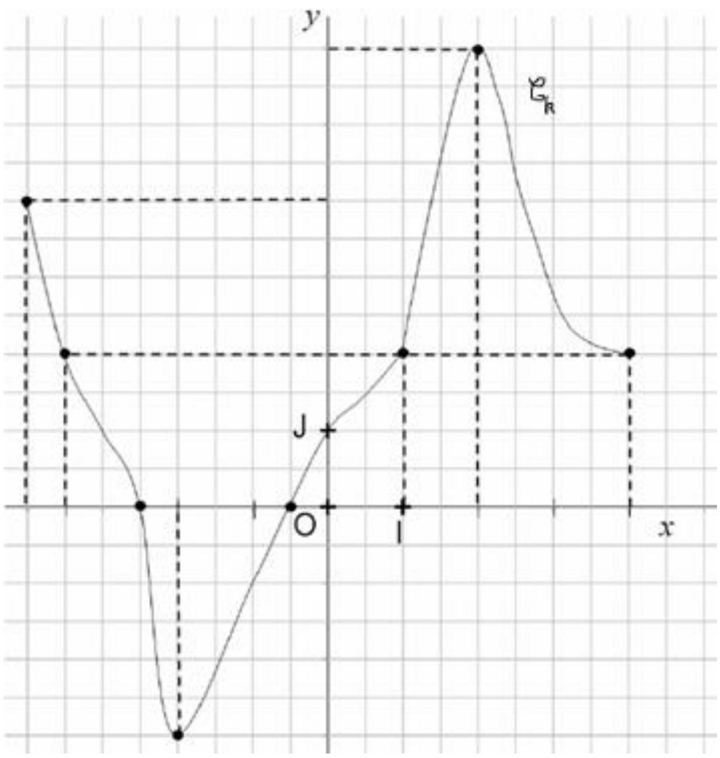


- ◻ $f(3) = 0$
- ◻ $f(4) < f(5)$
- ◻ $f(4) \geqslant 0$

2. g est une fonction telle que $(-2) = 1$, $g(0) = -3$ et $g(5) = 4$.
De plus, g est décroissante sur $[-2; 0]$ et croissante sur $[0; 5]$.
Alors, pour tout réel x de $[-2; 5]$:

- ◻ $g(x) \geqslant -2$
- ◻ $-3 \leqslant g(x) \leqslant 4$
- ◻ $0 \leqslant g(x) \leqslant 5$

3. Voici la courbe d'une fonction k dans un repère (O, I, J)



a) Donner son tableau de variations.

c) Résoudre $k(x) \geqslant 2$

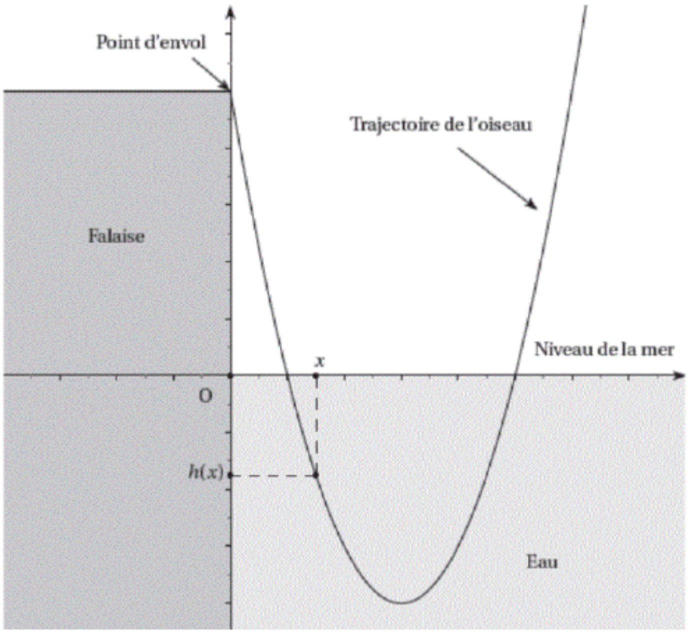
b) Compléter le plus précisément possible :
Si $x \in [-4; 0]$ alors $\dots\dots \leqslant k(x) \leqslant \dots\dots$

Exercice 2 **- 9 points -** **(sur le poly)**

Un oiseau se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis une falaise.
On note x la distance, en mètres, qui sépare l'oiseau de l'abrupt de la falaise, et $h(x)$ l'altitude (éventuellement négative), en mètres, de ce dernier par rapport au niveau de l'eau.
La situation est illustrée sur le schéma suivant, où le repère choisi a pour origine le point O, pied de la falaise, le niveau de l'eau pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées, l'abrupt de la falaise.

On admet que l'expression de $h(x)$ est donnée par : $h(x) = x^2 - 8\,x + 15$ pour x réel positif.

La trajectoire de l'oiseau peut donc être assimilée à une parabole qui est ainsi la courbe représentative C_h de la fonction h .



Le dessin n'est pas à la bonne échelle. Il ne faut donc pas faire de lecture graphique dans cet exercice

1. Quelle est la hauteur du point d'envol ? Justifier.

2. Montrer que, pour tout réel x : $h(x) = (x-3)(x-5)$

3. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.
   Que représentent les solutions de cette équation pour la trajectoire de l'oiseau ?

4. Résoudre l'inéquation $h(x) \leq 0$.
Que représentent les solutions de cette inéquation pour la trajectoire de l'oiseau ?

5. Après être ressorti de l'eau, à quelle distance de la falaise l'oiseau atteint-il l'altitude de 15 m ? Justifier votre réponse.

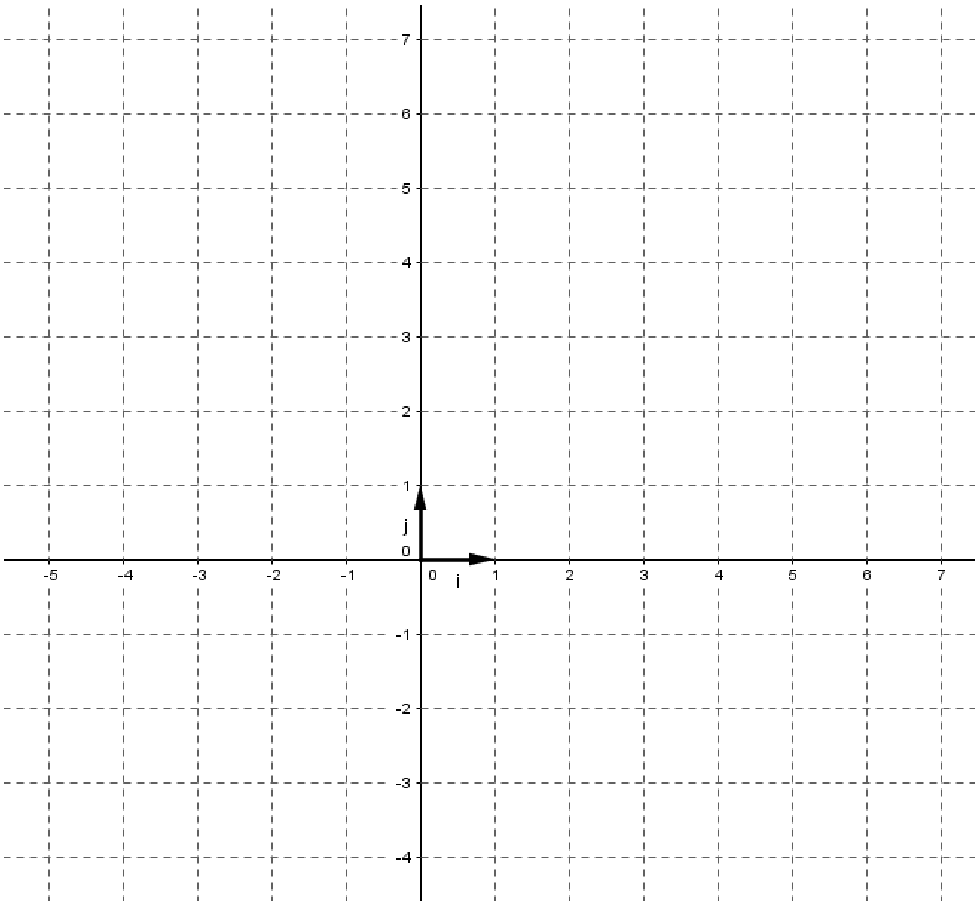
6. a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole C_h .

b) En déduire le tableau de variations complet de h sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

c) Quelle est alors la profondeur maximale atteinte par l'oiseau ?

<u>Exercice 3</u> **- 8 points -** **(début sur le poly puis sur une copie)**

On considère dans ce repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$, les points : $A(2\ ;\ 5)$, $B(4\ ;\ -2)$, $C(-5\ ;\ 1)$ et $D(-1\ ;\ 6)$.



1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ? (Justifier)

3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$. Déterminer alors les coordonnées du point K.

4. Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment [BC].

5. Démontrer alors que les points M, K et A sont alignés.

CORRECTION : DS 6 – 14 AVRIL 2016

Durée : 55 min **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Fonction	Fonction	Géométrie
	Ex 1	Ex 2	Ex 3
/ 20	/ 3	/ 9	/ 8

<u>Exercice 1</u> - 3 points - (sur le poly)

Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions 1) et 2), une seule réponse est correcte...laquelle ? Cocher la bonne réponse

1. Voici le tableau de variations d'une fonction .
Alors :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

■ ◻ $\boldsymbol{f\,(3) = 0}$
c'est la seule valeur indiquée dans le tableau.

◻ $\boldsymbol{f\,(4) < f\,(5)}$
f est strictement décroissante et $4 < 5$
Donc $f\,(4) > f\,(5)$

◻ $\boldsymbol{f\,(4) \geqslant 0}$
Comme $4 > 3$ et f strictement décroissante
Cela donne $f\,(4) < f\,(3)$
Et comme $f\,(3) = 0$
D'où vient $f\,(4) < 0$

2. g est une fonction telle que $(-2) = 1$, $g\,(0) = -3$ et $g\,(5) = 4$.
De plus, g est décroissante sur $[-2; 0]$ et croissante sur $[0\,; 5]$.
Alors, pour tout réel x de $[-2; 5]$:

◻ $\boldsymbol{g\,(x) \geqslant -2}$
Contre exemple : si $x = 0$ alors $g\,(x) = -3$

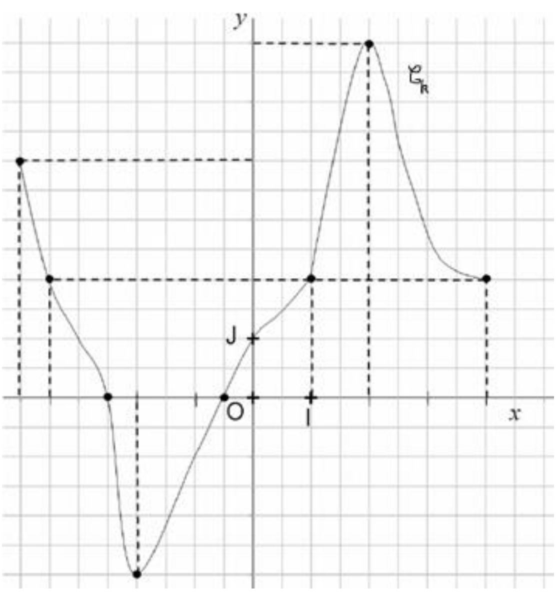
■ ◻ $\boldsymbol{-3 \leqslant g\,(x) \leqslant 4}$
D'après le tableau de variations, le minimum vaut -3 et la maximum vaut 4 .

◻ $\boldsymbol{0 \leqslant g\,(x) \leqslant 5}$
Le minimum vaut -3 et non pas 0....

On peut construire le tableau de variations :

x	-2		0		5
$g(x)$	1	↘	-3	↗	4

3. Voici la courbe d'une fonction k dans un repère (O , I , J)



a) Donner son tableau de variations.

x	-4		-2		2		4
$h(x)$	4	↘	-3	↗	6	↘	2

c) Résoudre $k(x) \geqslant 2$
On cherche les abscisses des points de C_k dont l'ordonnée est supérieur à 2
On trouve $S = [-4; -3{,}5] \cup [1; 4]$

b) Compléter le plus précisément possible :
Si $x \in [-4\,; 0]$ alors $-3 \leqslant k(x) \leqslant 4$

Exercice 2 **- 9 points -**

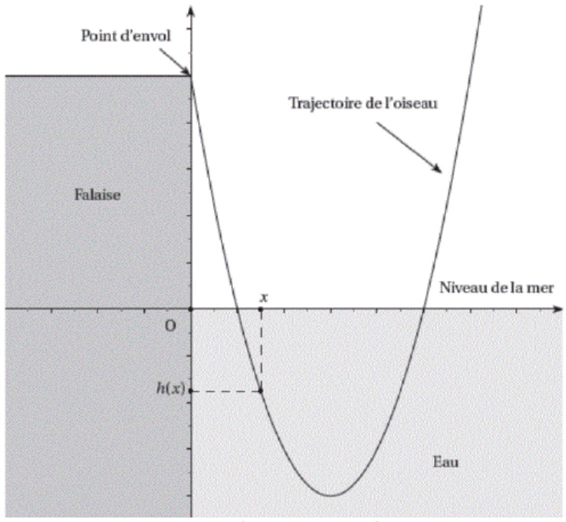
Un oiseau se nourrit de poissons en plongeant dans l'eau depuis une falaise.

On note x la distance, en mètres, qui sépare l'oiseau de l'abrupt de la falaise, et $h(x)$ l'altitude (éventuellement négative), en mètres, de ce dernier par rapport au niveau de l'eau.

La situation est illustrée sur le schéma suivant, où le repère choisi a pour origine le point O, pied de la falaise, le niveau de l'eau pour axe des abscisses, et pour axe des ordonnées, l'abrupt de la falaise.

On admet que l'expression de $h(x)$ est donnée par : $h(x) = x^2 - 8\,x + 15$ pour x réel positif.

La trajectoire de l'oiseau peut donc être assimilée à une parabole qui est ainsi la courbe représentative C_h de la fonction h .



Le dessin n'est pas à la bonne échelle. Il ne faut donc pas faire de lecture graphique dans cet exercice

1. Quelle est la hauteur du point d'envol ? Justifier.

La position de l'oiseau au point d'envol se situe sur l'axe des ordonnées et sur la courbe de h
D'où en $x = 0$ et $y = h\,(0) = 0^2 - 8 \times 0 + 15 = 15$
Donc la hauteur de l'oiseau est donc 15 m

2. Montrer que, pour tout réel x : $h(x) = (x - 3)(x - 5)$

On a $(x-3)(\,x-5) = x^2 - 5\,x - 3\,x + \,15 = x^2 - 8\,x + \,15 = h(\,x\,)$

3. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.
Que représentent les solutions de cette équation pour la trajectoire de l'oiseau ?

On sait que $h(x) = (x-3)(\,x-5)$
Alors $h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\,x-3)(\,x-5) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 3$ ou $x = 5$
Donc $S = \{3\,;5\}$

Ces 2 solutions indiquent à quel moment l'oiseau traverse la surface de l'eau : lorsqu'il est à 3 mètres ou à 5 mètres de l'abrupt de la falaise.

4. Résoudre l'inéquation $(x) \leq 0$.
Que représentent les solutions de cette inéquation pour la trajectoire de l'oiseau ?

On sait que $h(x) = (x-3)(\,x-5)$
On dresse alors le tableau de signe de $h(x)$

x	0		3		5		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $S = [3; 5]$
Donc cela signifie que l'oiseau est en dessous de la surface de l'eau lorsqu'il est à une distance comprise entre 3 et 5 mètres par rapport à l'abrupt de la falaise.

5. Après être ressorti de l'eau, à quelle distance de la falaise l'oiseau atteint-il l'altitude de 15 m ? Justifier votre réponse.

On peut chercher à résoudre $h(x) = 15$

Ce qui équivaut à $x^2 - 8\,x + 15 = 15$ ⇔ $x^2 - 8\,x = 0$ ⇔ $x(x-8) = 0$ ⇔ $x = 0$ ou $x = 8$

Ainsi, la hauteur de l'oiseau vaut 15 mètres au point d'envol (voir 1.) ou après être ressorti de l'eau à 8 mètres de l'abrupt de la falaise.

6. a) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $\boldsymbol{C_h}$.

On sait que $h(x) = x^2 - 8\,x + 15$

Donc h est une fonction polynome du second degré avec $a = 1$, $b = -8$ et $c = 15$

Alors h admet un minimum en $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 1} = \frac{8}{2} = 4$

Comme $h(4) = 4^2 - 8 \times 4 + 15 = 16 - 32 + 15 = 31 - 32 = -1$

Donc C_h admet comme sommet (4 ;-1)

b) En déduire le tableau de variations complet de h sur l'intervalle $[\mathbf{0}\,;\mathbf{8}]$.

Comme le coefficient du x^2 vaut 1> 0 , on justifie que C_h a bien une parabole orientée comme celle de la fonction carrée ; les coordonnées du sommet établie avant nous permettent d'indiquer les valeurs du tableau de variations.

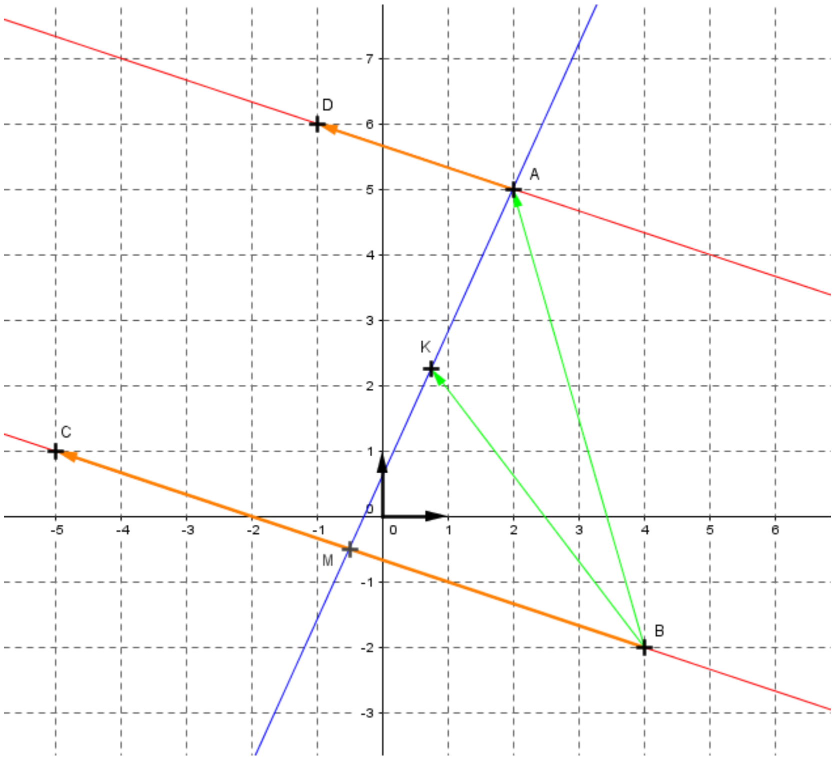
x	0		4		8
$h(x)$	15	↘	-1	↗	15

c) Quelle est alors la profondeur maximale atteinte par l'oiseau ?

Cette profondeur correspond à l'extremum de h qui vaut -1 mètre.

<u>Exercice 3</u> - 8 points -

On se place dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ orthonormé.



On considère dans ce repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, les points : $A(2\,;\,5)$, $B(4\,;\,-2)$, $C(-5\,;\,1)$ et $D(-1\,;\,6)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $(x_A - x_B\,;\, y_A - y_B)$

<u>Alors</u> $\overrightarrow{BA}\ (2-4\,;\,5-(-2))$

<u>Donc</u> $\overrightarrow{BA}\ (-2\,;\,7)$

<u>De même</u>

$\overrightarrow{BC}\ (-5-4\,;\,1-(-2))$

$\overrightarrow{BC}\ (-9\,;\,3)$

$\overrightarrow{AD}\ (-1-2\,;\,6-5)$

$\overrightarrow{AD}\ (-3\,;\,1)$

2. Que peut-on dire des droites (BC) et (AD) ?

On obtient : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{AD}$

<u>D'où</u> les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires

<u>Donc</u> les droites (BC) et (AD) sont parallèles.

3. Le point K est tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$. Déterminer alors les coordonnées du point K.

<u>On a</u> le point K tel que $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$

<u>Alors</u> $\overrightarrow{BA}\ (-2\,;\,7)$ d'où $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\ (-9\,;\,3)$ d'où $\frac{1}{4}\,\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}-\frac{9}{4}\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

<u>D'où</u> $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1-\frac{9}{4}\\ \frac{7}{2}+\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{4}{4}-\frac{9}{4}\\ \frac{14}{4}+\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4}\\ \frac{17}{4}\end{pmatrix}$

<u>Donc</u> $\begin{cases} x_K - x_B = -\frac{13}{4} \\ y_K - y_B = \frac{17}{4}\end{cases}$ $\begin{cases} x_K - 4 = -\frac{13}{4} \\ y_K - (-2) = \frac{17}{4}\end{cases}$ $\begin{cases} x_K = -\frac{13}{4} + 4 \\ y_K = \frac{17}{4} - 2\end{cases}$

$\begin{cases} x_K = -\frac{13}{4} + \frac{16}{4} \\ y_K = \frac{17}{4} - \frac{8}{4}\end{cases}$ $\begin{cases} x_K = \frac{3}{4} \\ y_K = \frac{9}{4}\end{cases}$

<u>Conclusion</u> $K\left(\frac{3}{4}\,;\frac{9}{4}\right)$

4. Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment [BC].

Le milieu M du segment [BC] a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{4+(-5)}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Donc $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

5. Démontrer alors que les points M, K et A sont alignés.

On a $M\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; $K\left(\frac{3}{4}; \frac{9}{4}\right)$ et $A(2\,;\,5)$

Alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - 2 \\ -\frac{1}{2} - 5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{4}{2} \\ -\frac{1}{2} - \frac{10}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} x_K - x_A \\ y_K - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 2 \\ \frac{9}{4} - 5 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{8}{4} \\ \frac{9}{4} - \frac{20}{4} \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AK}\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{11}{4} \end{pmatrix}$

On utilise la formule pour la colinéarité

$$X\,Y' - X'Y = \left(-\frac{5}{2}\right) \times \left(-\frac{11}{4}\right) - \left(-\frac{5}{4}\right) \times \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{55}{8} - \frac{55}{8} = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires

Conclusion les points A, M et K sont alignés.