LYCÉE VINCENT VAN GOGH FRANÇAIS LA HAYE - AMSTERDAM

DS 5 – 11 MARS 2016

Durée : 2h **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation. Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Algèbre		Fonction	Statistique		Géométrie	
	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7
/ 40	/ 7	/ 4	/ 7	/ 9	/ 5	/ 4	/ 6

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du 1er degré				
Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation				
Déterminer l'image d'un nombre par une fonction donnée par une formule				
Rechercher des antécédents d'un nombre par une fonction donnée par une formule				
Calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion : médiane, quartiles, moyenne				
Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées				
Etudier des positions relatives de droites et de plans				

<u>Exercice 1</u> - 7 points - (sur la copie)

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(5x-1)(3-2x)\geq 0$

(b) $\dfrac{(3x-1)(x+1)}{x(x-1)}\geq 0$

(c) $\dfrac{4}{3x+1}-1>0$

(d) $16-x^2+(4-x)(x+6)\leq 0$

<u>Exercice 2</u> - 4 points - (sur la copie)

1. Quel est l'ensemble de définition de l'inéquation $\dfrac{1}{4x-1}\leq\dfrac{1}{x+3}$?

2. Montrer que l'inéquation ci-dessus est équivalente à l'inéquation $\dfrac{-3x+4}{(4x-1)(x+3)}\leq 0$

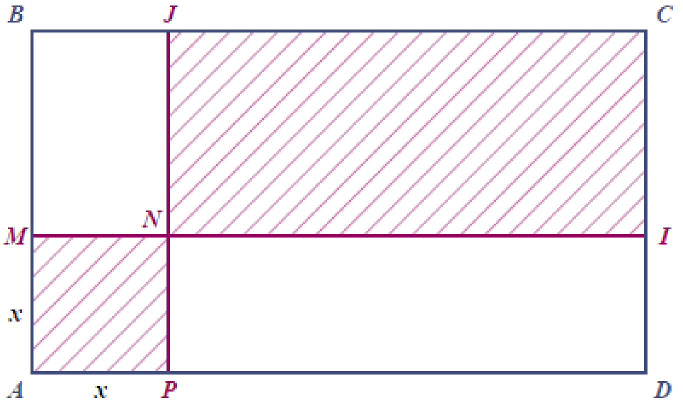
3. Résoudre alors l'inéquation donnée.

Exercice 3 **- 7 points -** **(sur la copie)**

ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 9$.

M étant un point du segment [AB], on construit le carré AMNP et le rectangle NICJ comme indiqué sur la figure ci-contre.

On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie qui est hachurée.

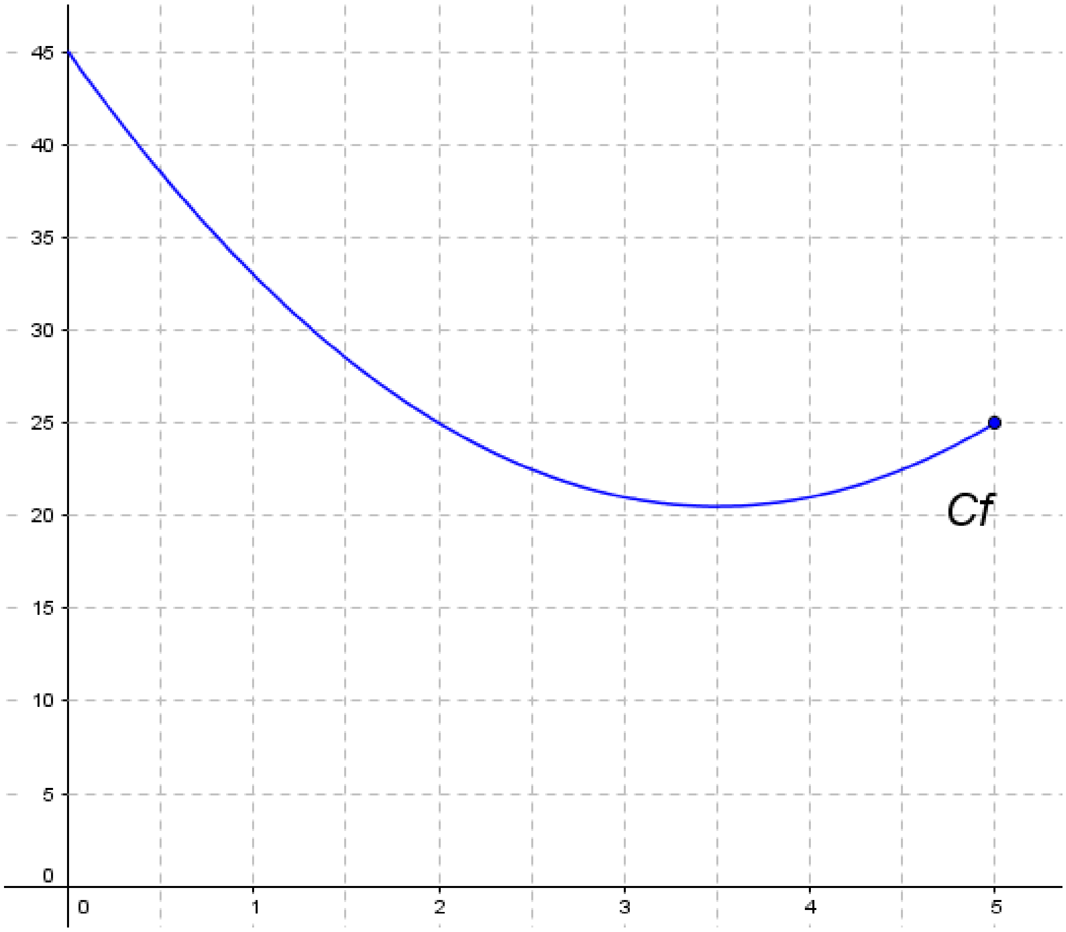


Les parties I et II sont indépendantes

Partie I

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



À l'aide du graphique, déterminer :

a) l'aire de la partie hachurée quand $x = 1{,}5$?

b) la valeur de x pour avoir l'aire de la partie hachurée égale à 35 ?

c) la position du point M pour que l'aire de la partie hachurée soit minimale

d) l'intervalle sur lequel l'aire de la partie hachurée est supérieure à 25.

Partie II

1. Montrer que la fonction f est définie par $f(x) = 2x^2 - 14x + 45$.

2. Calculer $f\left(\frac{7}{2}\right)$. Est-il possible que l'aire de la partie hachurée soit inférieure à $\frac{81}{4}$?

3. Déterminer les positions éventuelles du point M pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à l'aire de MNPDCB.

Exercice 4 **- 9 points -** **(sur la copie, sauf question 1)**

Le tableau suivant donne le salaire brut mensuel, par catégorie socio-professionnelle simplifiée dans une entreprise :

Salaire	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2500	3100	4500
Effectif	10	12	22	19	8	8	5	4	2	1

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série. Combien cette entreprise a-t-elle de salariés ?

2. Calculer l'arrondi à l'euro près du salaire moyen brut.

3. Calculer l'étendue du salaire dans cette entreprise.

4. Quel est le montant du salaire médian ? Déterminer les montants du premier et du troisième quartiles.

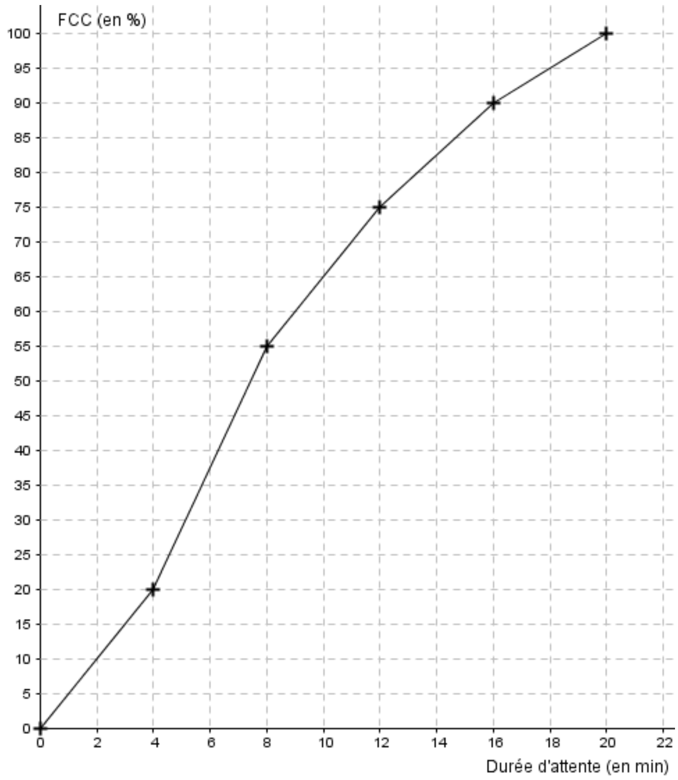
5. Calculer à 0,1% prés, le pourcentage du nombre de salaires compris dans l'intervalle interquartile.

6. Dans la série initiale, une erreur a été commise : il y a en fait 9 salaires de 1500 euros et 18 salaires de 1700 euros.
Décrire sans calculatrice l'influence de cette erreur sur l'étendue, le salaire médian et le salaire moyen.

Exercice 5 **- 5 points -** **(sur le poly)**

La courbe ci-contre représente les fréquences cumulées croissantes associées au temps d'attente des usagers au guichet d'un bureau de poste, observé durant un mois.

Les temps d'attente ont été comptabilisés dans des classes de 4 minutes d'amplitude. On admet que dans chaque classe, la répartition des durées est uniforme.



1. Quel pourcentage des usagers a un temps d'attente inférieur ou égal à 10 minutes ?

2. A partir du graphique ci-contre, compléter la ligne fréquences cumulées croissantes dans le tableau ci-dessous, puis la ligne des fréquences.

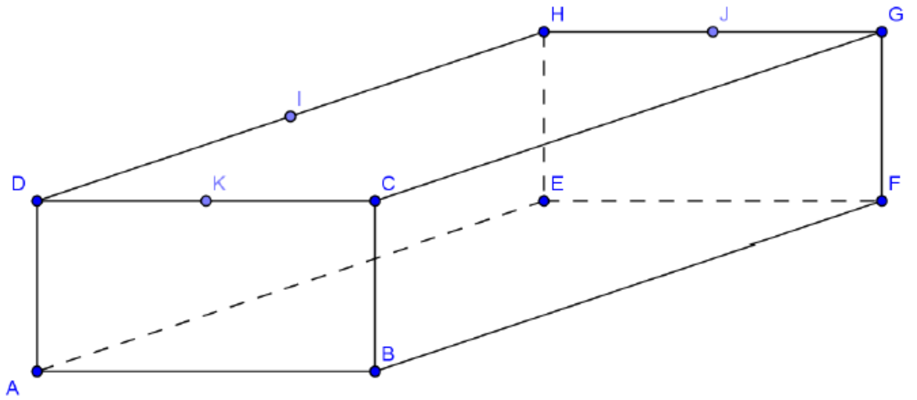
Durée d'attente (en min)	[0 ; 4 [	[... ; ... [			
FCC (en %)					
Fréquence					

3. Quel est le temps médian d’attente ?

4. Pour assurer le bon fonctionnement du service public, le directeur estime que 80 % de la population doit avoir un temps d'attente inférieur à 14 minutes.

Exercice 6 **- 2 points -** **(sur le poly)**

On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous.
Dans la réalité, les longueurs suivantes sont données : AB = 16 cm, AD = 6 cm et AE = 20 cm.
De plus, les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [DH], [HG] et [CD].



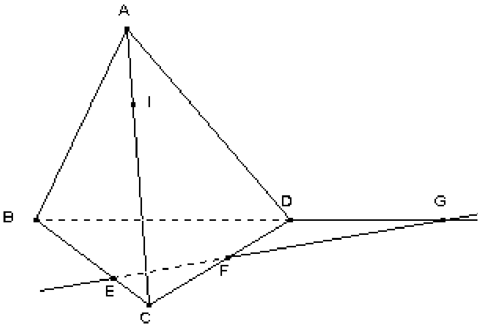
1. Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est correcte. Mettre une croix dans les cases qui conviennent.

	Sécants	Parallèles	Confondus	Non coplanaires
(CKI) et (DJG)				
(HIE) et (BCJ)				
(ABI) et (HGE)				
(IKA) et (BE)				
(AIB) et (FJ)				
(BK) et (EJ)				
(AD) et (IE)				
(AB) et (HG)				

2. Sur la figure ci-dessus, construire en couleur la section de ce pavé droit par le plan (BGI).
(Aucune rédaction demandée mais laisser les traits de construction apparents)

Exercice 7 **- 6 points -** **(sur la copie)**

On considère le tétraèdre ABCD.
On pose E est un point de l'arête [BC],
F est un point de l'arête [CD],
I est un point de l'arête [AC].
Les droites (IF) et (AD) ne sont pas parallèles.
Les droites (EF) et (BD) sont sécantes en G.
On note *P* le plan défini par les points E, F et I.



1) Tracer en rouge l'intersection des plans *P* et (ABC). Justifier.

2) Montrer que la droite (AD) et le plan P sont sécants en un point H. Justifier.

3) Quelle est l'intersection du plan (ABD) avec le plan P ? Justifier.

DS 5 – 11 MARS 2016

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Résoudre une inéquation à partir de l'étude du signe d'une expression produit ou quotient de facteurs du 1er degré				
Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation				
Déterminer l'image d'un nombre par une fonction donnée par une formule				
Rechercher des antécédents d'un nombre par une fonction donnée par une formule				
Calculer et interpréter les caractéristiques de position et de dispersion : médiane, quartiles, moyenne				
Calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées				
Etudier des positions relatives de droites et de plans				

Exercice 1 **- 7 points -**

Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $(\mathbf{5x-1})(\mathbf{3-2x}) \geq \mathbf{0}$

(b) $\dfrac{(\mathbf{3x-1})(\mathbf{x+1})}{\mathbf{x}(\mathbf{x-1})} \geq \mathbf{0}$

(c) $\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3x+1}} - \mathbf{1} > \mathbf{0}$

(d) $\mathbf{16 - x^2 + (4-x)(x+6) \leq 0}$

(a) $(\mathbf{5x-1})(\mathbf{2-3x}) \geq \mathbf{0}$

x	$-\infty$		$1/5$		$3/2$	
$5x-1$		$-$	0	$+$		$+$
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$
$(5x-1)(2-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

$5x-1=0 \quad x=\frac{1}{5}$

$3-2x=0 \quad x=\frac{3}{2}$

Donc $S=\left[\frac{1}{5};\frac{3}{2}\right]$

(b) $\dfrac{(3x-1)(x+1)}{x(x-1)} \geq 0$

Valeurs interdites : 0 et 1

x	$-\infty$		-1		0		$1/3$		1	
$3x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
P		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

$3x-1=0 \quad x=\frac{1}{3}$

$x+1=0 \quad x=-1$

$x=0$

$x-1=0 \quad x=1$

Donc $S=]-\infty;-1] \cup \left]0;\frac{1}{3}\right] \cup]1;+\infty[$

(c) $\dfrac{4}{3x+1} - 1 > 0$

<u>Valeurs interdites :</u> $-\frac{1}{3}$

<u>Simplification:</u>

$$\frac{4}{3x+1} - 1 > 0$$
$$\frac{4-(3x+1)}{3x+1} > 0$$
$$\frac{4-3x-1}{3x+1} > 0$$
$$\frac{-3x+3}{3x+1} > 0$$

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$-3x+3$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Q		$-$	||	$+$	0	$-$	

$-3x+3=0 \quad x=\frac{3}{3}=1$

$3x+1=0 \quad x=-\frac{1}{3}$

<u>Donc</u> $S = \left]-\frac{1}{3}; 1\right[$

(d) $16 - x^2 + (4-x)(x+6) \leq 0$

Comme on a une inéquation, il faudra dresser un tableau de signe

Il faut avant cela factoriser

$$16 - x^2 + (4-x)(x+6) \leq 0$$
$$4^2 - x^2 + (4-x)(x+6) \leq 0$$
$$(4-x)(4+x) + (4-x)(x+6) \leq 0$$
$$(4-x)[(4+x)+(x+6)] \leq 0$$
$$(4-x)(4+x+x+6) \leq 0$$
$$(4-x)(2x+10) \leq 0$$

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$4-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+10$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Q		$-$	0	$+$	0	$-$	

$4-x=0 \quad x=4$

$2x+10=0 \quad x=-\frac{10}{2}=-5$

<u>Donc</u> $S =]-\infty; -5] \cup [4; +\infty[$

Exercice 2 **- 4 points -**

1. Quel est l'ensemble de définition de l'inéquation $\mathbf{\frac{1}{4x-1} \leq \frac{1}{x+3}}$ **?**

L'inéquation est bien définie lorsque $4x - 1 \neq 0$ et $x + 3 \neq 0$.

$4x \neq 1$ $\quad$ $x \neq -3$

$x \neq \frac{1}{4}$

Les valeurs interdites sont -3 et $\frac{1}{4}$

Donc l'ensemble de définition est $\mathbb{R} - \left\{-3; \frac{1}{4}\right\} =]-\infty; -3[\cup \left]-3; \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}; +\infty\right[$

2. Montrer que l'inéquation ci-dessus est équivalente à l'inéquation $\mathbf{\frac{-3x+4}{(4x-1)(x+3)} \leq 0}$

$$\frac{1}{4x-1} \leq \frac{1}{x+3}$$
$$\frac{1}{4x-1} - \frac{1}{x+3} \leq 0$$
$$\frac{1(x+3) - 1(4x-1)}{(4x-1)(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{x+3-4x+1}{(4x-1)(x+3)} \leq 0$$
$$\frac{-3x+4}{(4x-1)(x+3)} \leq 0$$

3. Résoudre alors l'inéquation donnée.

$$\frac{-3x+4}{(4x-1)(x+3)} \leq 0$$

x	$-\infty$		-3		$1/4$		$4/3$		$+\infty$
$-3x+4$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Q		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

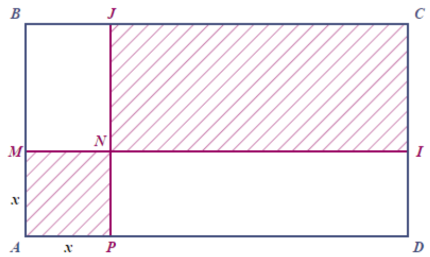
$-3x + 4 = 0$ $\quad x = \frac{4}{3}$

$4x - 1 = 0$ $\quad x = \frac{1}{4}$

$x + 3 = 0$ $\quad x = -3$

Donc $S = \left]-3; \frac{1}{4}\right[\cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right[$

<u>Exercice 3</u> **- 7 points -**



ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 9$.

M étant un point du segment [AB], on construit le carré AMNP et le rectangle NICJ comme indiqué sur la figure ci-contre.

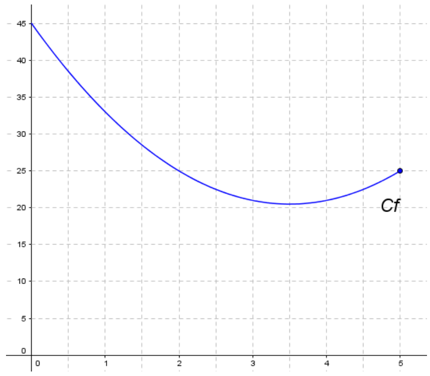
On pose $AM = x$ et on note $f(x)$ l'aire de la partie qui est hachurée.

Les parties I et II sont indépendantes

<u>Partie I</u>

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

M est un point du segment [AB] donc $x \in [0; 5]$.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 5]$.



2. La courbe représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.

À l'aide du graphique, déterminer :

a) l'aire de la partie hachurée quand $x = 1,5$?

On cherche l'image de 2 par la fonction f
L'aire est d'environ 28 cm² quand $x = 1{,}5$

b) la valeur de x pour avoir l'aire de la partie hachurée égale à 35 ?

On cherche l'antécédent de 35 par la fonction f
L'aire est égale à 35 cm² quand $x = 0{,}7$

c) la position du point M pour que l'aire de la partie hachurée soit minimale

Le maximum de la fonction f est atteint pour $x = 3{,}5$.
L'aire de la partie non hachurée soit maximale pour $AM = 3{,}5$.

d) l'intervalle sur lequel l'aire de la partie hachurée est supérieure à 25.

Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 25$ sont les abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est supérieure à 25.
L'aire de la partie non hachurée est inférieure à 25 sur l'intervalle $[0; 2]$ et 5.

<u>Partie II</u>

1. Montrer que la fonction f est définie par $f(x) = 2x^2 - 14x + 45$.

$f(x)$ est égal à la somme des aires du rectangle APNM et du rectangle NICJ
<u>D'où</u> : $f(x) = x \times x + (5 - x)(9 - x) = x^2 + 45 - 5x - 9x + x^2 = 2x^2 - 14x + 45$
<u>Donc</u> f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par $f(x) = 2x^2 - 14x + 45$.

2. Calculer $f\left(\frac{7}{2}\right)$. Est-il possible que l'aire de la partie hachurée soit inférieure à $\frac{81}{4}$?

On a $f(x) = 2x^2 - 14x + 45$

D'où $f\left(\frac{7}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 14 \times \frac{7}{2} + 45 = \frac{51}{2} = 20{,}5$

Le minimum de la fonction f est égal à 20,5 donc il n'est pas possible que l'aire de la partie hachurée soit inférieure à $\frac{81}{4}$.

3. Déterminer les positions éventuelles du point M pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à l'aire de MNPDCB.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 5]$,

$$\begin{aligned}
f(x) = 2x^2 &\iff 2x^2 - 14x + 45 = 45 - x^2 \\
&\iff 2x^2 - 14x + 45 = 45 - x^2 \\
&\iff 2x^2 + x^2 - 14x + 45 - 45 = 0 \\
&\iff 3x^2 - 14x = 0 \\
&\iff x(3x - 14) = 0 \\
&\iff x = 0 \ \ ou \ \ x = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

L'aire de la partie non hachurée soit égale au double de l'aire du carré AMNP quand M est confondu avec A ou quand $AM = \frac{14}{3}$.

Exercice 4 **- 9 points -** **(sur la copie, sauf question 1)**

Le tableau suivant donne le salaire brut mensuel, par catégorie socio-professionnelle simplifiée dans une entreprise :

Salaire	**900**	**1100**	**1300**	**1500**	**1700**	**1900**	**2100**	**2500**	**3100**	**4500**
Effectif	**10**	**12**	**22**	**19**	**8**	**8**	**5**	**4**	**2**	**1**
ECC	10	22	44	63	71	79	84	88	90	91

1. Dresser le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série. Combien cette entreprise a-t-elle de salariés ?

Cette entreprise a 91 salariés.

2. Calculer l'arrondi à l'euro près du salaire moyen brut.

Le calcul du salaire moyen brut noté $\bar{s}$ donne

$$\bar{s} = \frac{900 \times 10 + 1\,100 \times 12 + 1\,300 \times 22 + \cdots + 2\,500 \times 4 + 3\,100 \times 2 + 4\,500}{91} \approx 1531$$

Le salaire moyen brut de cette entreprise est de 1 531 euros environ.

3. Calculer l'étendue du salaire dans cette entreprise.

L'étendue du salaire dans cette entreprise est de 3 600 euros car $4\,500 - 900 = 3600$

4. Quel est le montant du salaire médian ? Déterminer les montants du premier et du troisième quartiles.

L'effectif total est de 91, alors valeur arrondie par excès de $\frac{91}{2} = 45{,}5$
Alors le salaire médian est donc la donnée de rang 46
Ce qui donne un salaire médian de 1 500 euros.

Le premier quartile est la donnée de rang 23 (valeur arrondie par excès de $\frac{91}{4} = 22{,}8$),
Ce qui donne Q1 = 1 300 euros.

Le troisième quartile est la donnée de rang 69 (valeur arrondie par excès de $\frac{3\times91}{4} = 68{,}3$),
Ce qui donne Q3 = 1 700 euros.

5. Calculer à 0,1% prés, le pourcentage du nombre de salaires compris dans l'intervalle interquartile.

Le nombre de salaires compris dans l'intervalle interquartile est le nombre de salaires compris entre 1 300 euros (inclus) et 1 700 euros (inclus).
Il y en a donc : 22+19+8 = 49
Alors $\frac{49}{91} \times 100 = 53{,}85$
Donc ce pourcentage du total correspondant à 49,5% en arrondissant à 0,1 % près comme demandé.

6. Dans la série initiale, une erreur a été commise : il y a en fait 9 salaires de 1500 euros et 18 salaires de 1700 euros.
Décrire sans calculatrice l'influence de cette erreur sur l'étendue, le salaire médian et le salaire moyen.

• Cette erreur ne concerne pas les valeurs extrêmes de la série et ne change donc pas l'étendue de la série qui reste de 3 600 euros.

• Le salaire médian est toujours la donnée de rang 45 de la série, qui reste toujours égale à 1 500 euros d'après le tableau ci-dessous où l'on a commencé à calculer les effectifs cumulés croissants :

Salaire	900	1100	1300	1500	1700	1900	2100	2500	3100	4500
Effectif	**10**	**12**	**22**	**9**	**18**	**8**	**5**	**4**	**2**	**1**
ECC	10	22	44	53	71	79	84	88	90	91

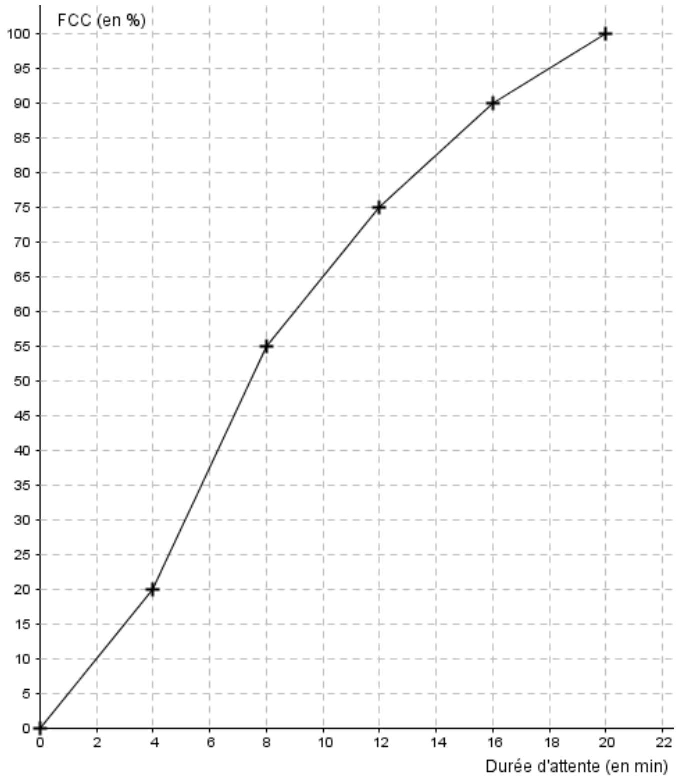
Le salaire médian ne change donc pas.

• En revanche, le salaire moyen augmente, puisque dix salaires sont passés de 1 500 à 1 700 euros.

Exercice 5 - 5 points - (sur la copie)

La courbe ci-contre représente les fréquences cumulées croissantes associées au temps d'attente des usagers au guichet d'un bureau de poste, observé durant un mois.

Les temps d'attente ont été comptabilisés dans des classes de 4 minutes d'amplitude. On admet que dans chaque classe, la répartition des durées est uniforme.



1. Quel pourcentage des usagers a un temps d'attente inférieur ou égal à 10 minutes ?

On cherche l'image de 10, on trouve environ 65
D'où par lecture graphique, 65 % environ des usagers ont un temps d'attente inférieur ou égal à 16 minutes.

2. A partir du graphique ci-contre, compléter la ligne fréquences cumulées croissantes dans le tableau ci-dessous, puis la ligne des fréquences.

Durée d'attente (en min)	$[\,0\,;\,4\,[$	$[\,\ldots\,;\,\ldots\,[$ $[4;8[$	$[8;12[$	$[12;16[$	$[16;20[$
FCC (en %)	20	55	75	90	100
Fréquence	20	35	20	15	10

3. Quel est le temps médian d'attente ?

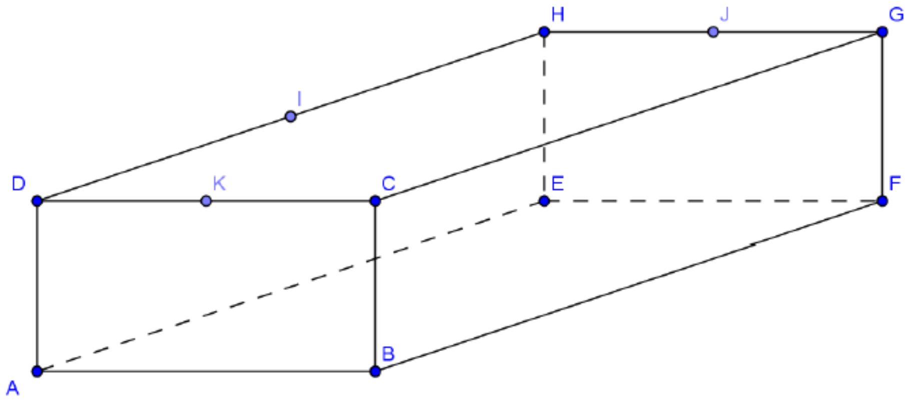
On cherche donc l'antécédent de 50 et on trouve environ 7,5
D'où le temps médian d'attente est d'environ 7,5 minutes.

4. Pour assurer le bon fonctionnement du service public, le directeur estime que 80 % de la population doit avoir un temps d'attente inférieur à 14 minutes.

D'après le graphique, environ 83% des gens ont un temps d'attente inférieur ou égal à 14 minutes.
L'objectif est donc atteint.

Exercice 6 **- 2 points -** **(sur la copie)**

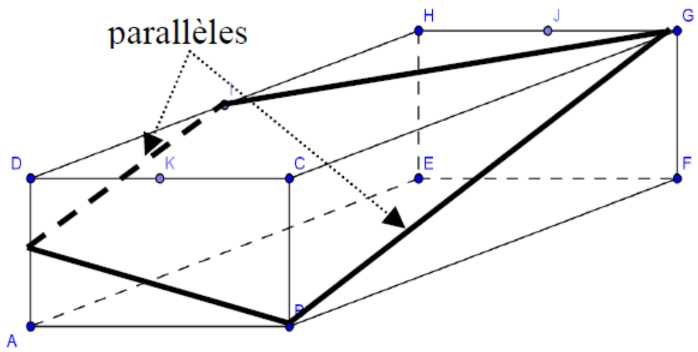
On considère le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous.
Dans la réalité, les longueurs suivantes sont données : AB = 16 cm, AD = 6 cm et AE = 20 cm.
De plus, les points I, J et K sont respectivement les milieux des segments [DH], [HG] et [CD].



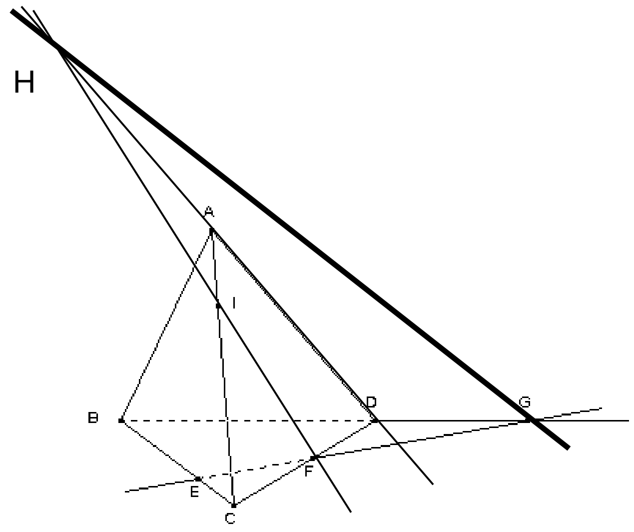
1. Pour chaque ligne du tableau, une seule réponse est correcte. Mettre une croix dans les cases qui conviennent.

	Sécants	Parallèles	Confondus	Non coplanaires
(CKI) et (DJG)			x	
(HIE) et (BCJ)	x			
(ABI) et (HGE)	x			
(IKA) et (BE)		x		
(AIB) et (FJ)	x			
(BK) et (EJ)				x
(AD) et (IE)	x			
(AB) et (HG)		x		

2. Sur la figure ci-dessus, construire en couleur la section de ce pavé droit par le plan (BGI).
(Aucune rédaction demandée mais laisser les traits de construction apparents)



<u>Exercice 7</u> - 6 points - (sur la copie)



1) Tracer en rouge l'intersection des plans *P* et (ABC). Justifier.

<u>On sait que</u>
E appartient à (BC), donc appartient au plan (ABC) ;
et E appartient aussi à P
<u>Donc</u> E appartient donc à l'intersection des plans (ABC) et P

<u>On sait que</u>
I appartient à (AC), donc appartient au plan (ABC) ;
et I appartient aussi à P
<u>Donc</u> I appartient donc à l'intersection des plans (ABC) et P

<u>Conclusion :</u> La droite (EI) est la droite d'intersection des plans (ABC) et P

2) Montrer que la droite (AD) et le plan P sont sécants en un point H. Justifier.

La droite (IF) est coplanaire à la droite (AD) dans le plan (ADC)
<u>Donc</u> les droites (IF) et (AD) sont sécantes (car non parallèles), soit H ce point d'intersection.
<u>D'où</u> $H \in (AD)$
et $H \in (IF)$ don $H \in P$
<u>Donc</u> H est le point d'intersection de P et de (AD)

3) Quelle est l'intersection du plan (ABD) avec le plan P ? Justifier.

<u>On sait que</u> H appartient à (AD), donc appartient au plan (ABD) ;
Et H appartient aussi à (IF), donc appartient au plan (IEF).
<u>Donc</u> H appartient donc à l'intersection des plans (ABD) et (IEF)

<u>On sait que</u> G appartient à (BD), donc appartient au plan (ABD) ;
Et G appartient aussi à (EF), donc appartient au plan (IEF).
<u>Donc</u> N appartient donc à l'intersection des plans (ABD) et (IEF)

<u>Conclusion :</u> La droite (HG) est la droite d'intersection des plans (ABD) et (IEF)