DS 4 – 22 JANVIER 2016

Durée : 2h **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Algèbre				Fonctions			Algo
	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 6	Ex 8
/ 40	/ 8	/ 2	/ 2	/ 2	/ 15	/ 3	/ 4	/ 4

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
– Résoudre une équation (simple, produit, quotient)				
– Mettre au même dénominateur				
– Mettre un problème en équation.				
– Résoudre une équation se ramenant au premier degré.				
– Rechercher des images ou des antécédents d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
– Décrire (par un texte ou un tableau de variations) les variations d'une fonction définie par une courbe				
– Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations				
– Connaître les variations des fonctions carré et inverse				
– Interpréter un algorithme donné				

Exercice 1 **- 8 points -** **(sur la copie)**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $2x-3(x+2)=4$

b) $-4x+6\leq 3x+20$

c) $25x^2-30x+9=0$

d) $(2x-1)^2=9$

e) $5x-\dfrac{x+1}{2}=1$

f) $\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{2x-1}{15}+\dfrac{1}{3}$

g) $\dfrac{(x+1)(2x-4)}{x-2}=0$

h) $\dfrac{2x-1}{x+3}=1$

Exercice 2 **- 2 points -** **(sur la copie)**

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 550.
(On pourra noter ces nombres x, $x+1$ et $x+2$)

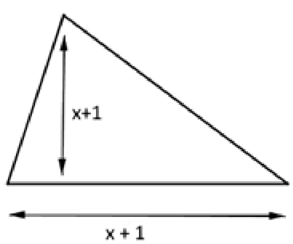
Exercice 3 **- 2 points -** **(sur la copie)**

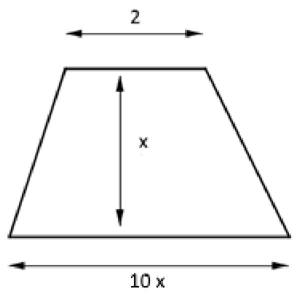
Dans un lycée, les professeurs de Seconde organisent un voyage de fin d'année ; ils ont loué des cars. S'ils décident de mettre quarante élèves par car, onze élèves n'ont pas de place. S'ils mettent quarante-trois élèves par car, il reste une place dans un car.
Combien y a-t-il de cars ?
Combien y a-t-il d'élèves ?

Exercice 4 **- 2 points -** **(sur la copie)**

Un géomètre prétend qu'on peut construire un triangle et un trapèze de même aire avec les dimensions suivantes (en cm).

Si le géomètre a raison, pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce possible ?

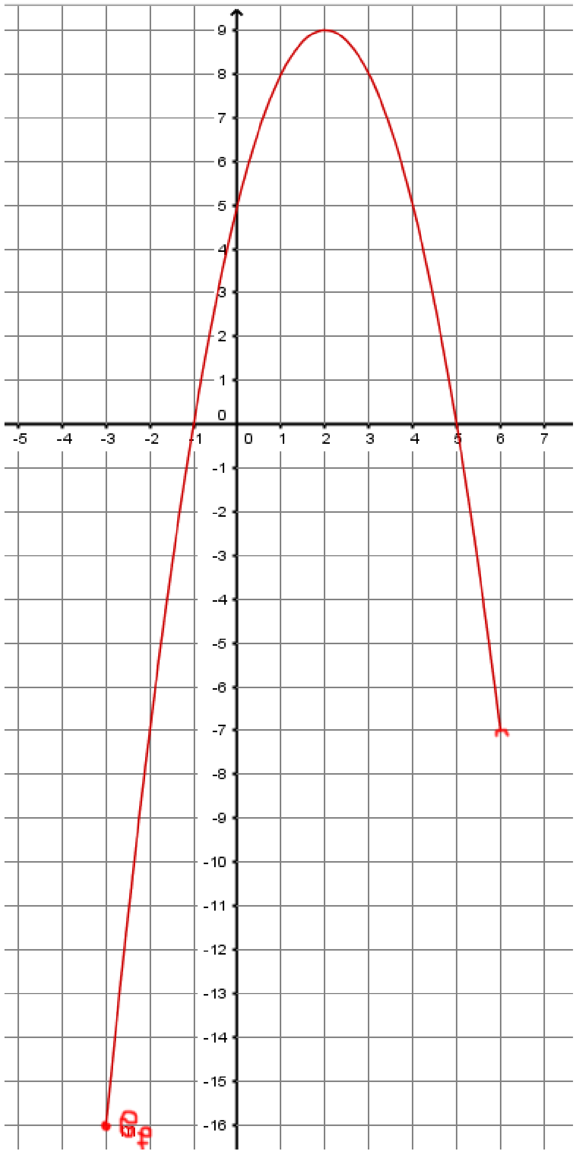




Exercice 5 - 15 points - (sur partie A sur le poly, partie B sur la copie)

Partie A

Soit f une fonction définie représentée par la courbe donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. a) Lire les images de 1 et -2 par la fonction f.

   b) Lire les antécédents de 0 et de -4.

3. a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

   b) Donner le maximum de la fonction f. En quelle valeur est-il atteint ?

4. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$.

   b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 5$.

   c) Si $x \in [-2\,;\,4]$, donner le meilleur encadrement possible pour $f(x)$.

5. Soit g définie par $g(x) = x + 5$.

   a) Représenter, sur le graphique donné, la fonction g.

   b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

   c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Partie B

On donne maintenant l'expression de la fonction dessinée ci-contre par : $f(x) = 9 - (x-2)^2$.

1. a) Développer et réduire l'expression $f(x)$.

   b) Factoriser l'expression $f(x)$ et montrer que : $f(x) = (x+1)(5-x)$.

2. Calculer $f(1)$ et $f(-\sqrt{3})$.

3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par f .

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = 5$ par le calcul.

   b) On rappelle que $g(x) = x + 5$, résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par le calcul.

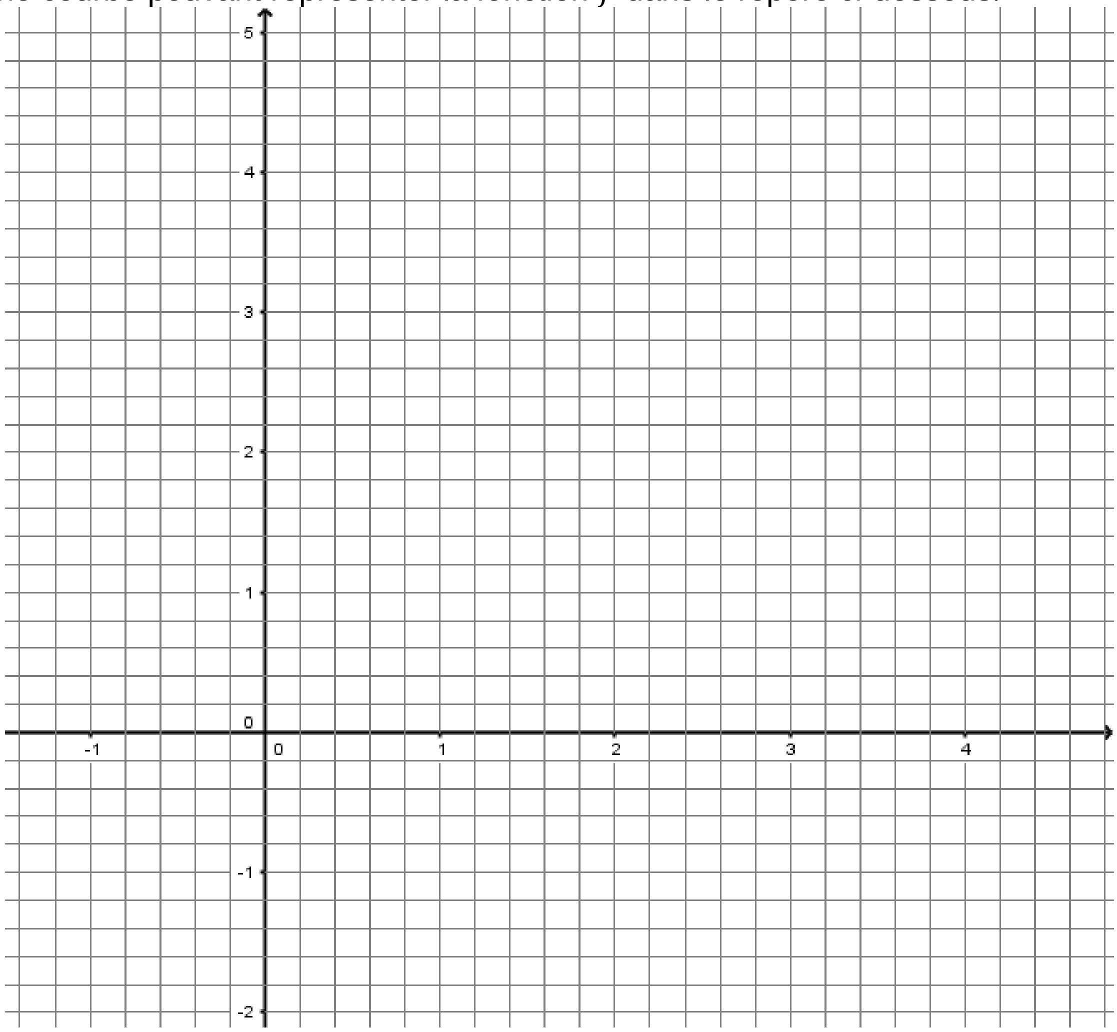
Exercice 6 **- 3 points -** **(sur le poly)**

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f .
On sait de plus que la courbe représentative de la fonction f passe par l'origine du repère.

x	-1		1		2		4
$f(x)$	$-1,4$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$0,6$	$\nearrow$	$3,6$

1. Pour chaque situation, entourer la seule bonne réponse parmi les quatre proposées :
   - Le maximum de la fonction f est :
     ◻ 1 ◻ 2 ◻ 3,6 ◻ 4
   - Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$ est :
     ◻ 1,4 ◻ -1 ◻ 0,6 ◻ 1
   - L'équation $f(x) = 0$ possède exactement :
     ◻ 0 solution ◻ 1 solution ◻ 2 solutions ◻ 3 solutions
   - On veut comparer les images $f(1{,}2)$ et $f(1{,}5)$:
     ◻ $f(1{,}2) < f(1{,}5)$ ◻ $f(1{,}2) = f(1{,}5)$ ◻ $f(1{,}2) > f(1{,}5)$ ◻ On ne peut rien dire

2. Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f dans le repère ci-dessous.



Exercice 7 **- 4 points -** **(sur la copie)**

1. Donner l'ensemble de définition D_C de la fonction carré, puis celui de la fonction inverse D_I .
2. Quel est le sens de variations de la fonction inverse sur D_C ?
3. Si $x \in]-5\,;-3\,[$, à quel intervalle appartient x^2 ? (justifier)
4. Si $x \in [5;10[$, à quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$? (justifier)
5. Comparer, en justifiant, $(\pi - 2)^2$ et $(\pi + 1)^2$.

Exercice 8 **- 4 points -** **(sur le poly)**

Considérons l'algorithme suivant :

Début algorithme	
Variables	
	x du type nombre N du type nombre
Entrée	
	Saisir x 0 → N
Traitement	
	Tant que N + 1 ≤ x │ faire N + 1 → N FinTant Afficher N
Fin algorithme	

1. On choisit pour valeur initiale $x = 5{,}2$. Compléter le tableau ci-dessous :

Numéro de passage de la boucle	Valeur de N avant le passage dans la boucle	Valeur de N après le passage dans la boucle	Arrêt de la boucle conditionnelle (oui/non)
1			

Combien de passages dans la boucle conditionnelle ont été nécessaires pour l'arrêt de l'algorithme ?

2. Recommencer l'algorithme pour $x = 2$.

Numéro de passage de la boucle	Valeur de N avant le passage dans la boucle	Valeur de N après le passage dans la boucle	Arrêt de la boucle conditionnelle (oui/non)
1			

3. Que donne l'algorithme pour $x = 3{,}1$?

4. Le nombre N obtenu est appelé la partie entière de x, noté $Ent\,(x)$.
   On a donc : $Ent(5{,}2) =......$ $Ent(2) =......$ et $Ent(3{,}1) =......$

CORRECTION : DS 4 – 22 JANVIER 2016

Durée : 2h **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

Bilan	Algèbre				Fonctions			Algo
	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 6	Ex 8
/ 40	/ 8	/ 2	/ 2	/ 2	/ 15	/ 3	/ 4	/ 4

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
– Résoudre une équation (simple, produit, quotient)				
– Mettre un problème en équation.				
– Résoudre une équation se ramenant au premier degré.				
– Déterminer l'image d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
– Rechercher des antécédents d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
– Décrire (par un texte ou un tableau de variations) les variations d'une fonction définie par une courbe				
– Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations				
– Connaître les variations des fonctions carré et inverse				
– Tracer la représentation graphique d'une fonction				
– Interpréter un algorithme donné				

Exercice 1 **- 8 points -**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\boldsymbol{2x-3(x+2)=4}$

$2x-3x-6=4$

$-x=4+6$

$-x=10$

$x=-10$

Donc $S=\{-10\}$

b) $\boldsymbol{-4x+6\leq 3x+20}$

$6-20\leq 3x+4x$

$-14\leq 7x$

$-\frac{14}{7}\leq x$

$-2\leq x$

Donc $S=[-2;+\infty[$

c) $\boldsymbol{25x^2-30x+9=0}$

$(5x)^2-2\times 5x\times 3+3^2=0$

$(5x-3)^2=0$

$5x-3=0$

$x=\frac{3}{5}$

Donc $S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$

d) $\boldsymbol{(2x-1)^2=9}$

$(2x-1)^2-3^2=0$

$(2x-1-3)(2x-1+3)=0$

$(2x-4)(2x+2)=0$

soit $2x-4=0$ soit $2x+2=0$

$x=2$ $x=-1$

Donc $S=\{-1;2\}$

e) $\boldsymbol{5x-\frac{x+1}{2}=1}$

$\frac{10x}{2}-\frac{x+1}{2}=\frac{2}{2}$

$\frac{10x-(x+1)}{2}=\frac{2}{2}$

$10x-x-1=2$

$9x=3$

$x=\frac{1}{3}$

Donc $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

f) $\boldsymbol{\frac{x-1}{5}+\frac{1}{3}\geq\frac{2x-1}{15}+\frac{1}{3}}$

$\frac{3(x-1)}{15}+\frac{5}{15}\geq\frac{2x-1}{15}+\frac{5}{15}$

$3x-3+5\geq 2x-1+5$

$3x+2\geq 2x+4$

$3x-2x\geq 4-2$

$x\geq 2$

Donc $S=[2;+\infty[$

g) $\dfrac{(x+1)(2x-4)}{x-2}=0$

• <u>Valeur interdite : 2</u>

$x-2=0$
$x=2$

• <u>Résolution</u>

$\dfrac{(x+1)(2x-4)}{x-2}=0$

$(x+1)(2x-4)=0$

soit $x+1=0$ $\quad x=-1$
soit $2x-4=0$ $\quad x=2$

Solutions possibles : -1 et 2

• <u>Bilan</u>

VI : 2
SP : 2 et -1

<u>Donc</u> $S=\{-1\}$

h) $\dfrac{2x-1}{x+3}=1$

• <u>Valeur interdite : -3</u>

$x+3=0$
$x=-3$

• <u>Résolution</u>

$\dfrac{2x-1}{x+3}-1=0$

$\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{1(x+3)}{x+3}=0$

$\dfrac{2x-1-(x+3)}{x+3}=0$

$\dfrac{2x-1-x-3}{x+3}=0$

$\dfrac{x-4}{x+3}=0$

$x-4=0$
$x=4$
Solution possible : 4

• <u>Bilan</u>

VI : -3
SP : 4

<u>Donc</u> $S=\{4\}$

<u>Exercice 2</u> - 2 points -

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 550.
(On pourra noter ces nombres x, $x+1$ et $x+2$)

On prend les trois nombres consécutifs : x, $x+1$ et $x+2$

$(x+2)^2 - x(x+1) = 550$
$x^2 + 4x + 4 - x^2 - x = 550$
$3x = 550 - 4$
$3x = 546$
$x = \dfrac{546}{3} = 182$

Donc les trois nombres consécutifs sont 182, 183 et 184.

<u>Exercice 3</u> - 2 points -

Dans un lycée, les professeurs de Seconde organisent un voyage de fin d'année ; ils ont loué des cars.

S'ils décident de mettre quarante élèves par car, onze élèves n'ont pas de place. S'ils mettent quarante-trois élèves par car, il reste une place dans un car.

Combien y a-t-il de cars ?

Combien y a-t-il d'élèves ?

On pose x le nombre de car

D'après l'énoncé, le nombre d'élèves s'obtient comme $40x + 11$ d'après la première possibilité, et comme $43x - 1$ d'après la deuxième.

Or le nombre d'élèves à faire voyager est le même

D'où l'équation : $40x + 11 = 43x - 1$

$40x - 43x = -11 - 1$

$-3x = -12$

$x = \frac{12}{3} = 4$

Il y a donc 4 cars.

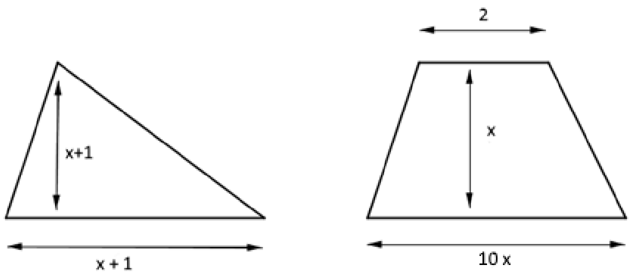
On en déduit qu'il y a 171 élèves car $40 \times 4 + 11 = 171$

Finalement, il y a 4 cars et 171 élèves.

<u>Exercice 4</u> - 2 points -

Un géomètre prétend qu'on peut construire un triangle et un trapèze de même aire avec les dimensions suivantes (en cm).

Si le géomètre a raison, pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce possible ?



$A_{triangle} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{(x+1)(x+1)}{2} = \frac{x^2+x+x+1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2}$

$A_{trapeze} = \frac{(b+B)\times h}{2} = \frac{(2+10x)\times x}{2} = \frac{2x+10x^2}{2}$

Alors $A_{triangle} = A_{trapeze}$

$\frac{x^2+2x+1}{2} = \frac{10x^2+2x}{2}$

$x^2 + 2x + 1 = 10x^2 + 2x$

$0 = 10x^2 - x^2 + 2x - 2x - 1$

$9x^2 - 1 = 0$

$(3x)^2 - 1 = 0$

$(3x-1)(3x+1) = 0$

Alors $3x - 1 = 0$ ou $3x + 1 = 0$

$x = \frac{1}{3}$ $x = -\frac{1}{3}$

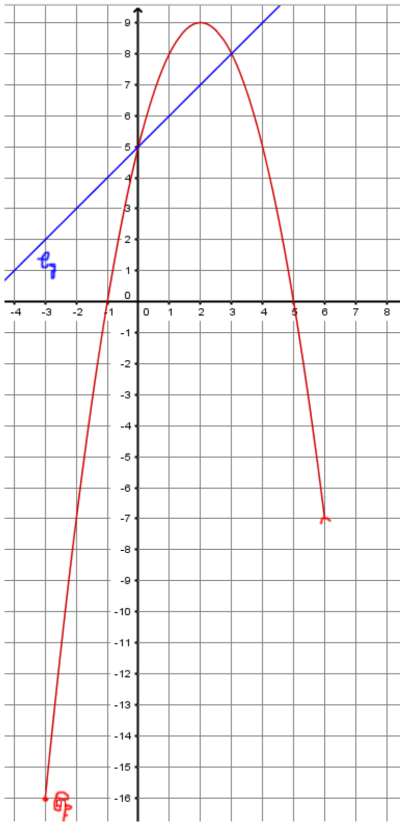
<u>Comme</u> x est une longueur, elle est possitive

<u>Donc</u> le géomètre a raison si $x = \frac{1}{3}$

<u>Exercice 5</u> - 15 points - (sur la copie)

<u>Partie A</u>

Soit f une fonction définie représentée par la courbe donnée ci-dessous.



1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

La fonction f est définie sur $[-3; 6[$

2. a) Lire les images de 1 et -2 par la fonction f.

Par lecture graphique, l'image de 1 est $f(1) = 8$ et l'image de -2 est $f(-2) = -7$.

b) Lire les antécédents de 0 et de -4.

Par lecture graphique, 0 admet deux antécédents : – 1 et 5.

Et -4 admet deux antécédents x_1 et x_2 dont on connaît une valeur approchée : $x_1 \approx -1{,}6$ et $x_2 \approx 5{,}6$.

3. a) Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.

La fonction f est croissante sur $]-3; 2]$ puis décroissante sur $[2\,; 6]$.

D'où le tableau de variation de f :

x	-3		2		6
$f(x)$	-16	↗	9	↘	-7

b) Donner le maximum de la fonction f. En quelle valeur est-il atteint ?

La fonction f admet un maximum égal à 9, atteint pour $x = 2$.

4. a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 8$.

On cherche les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est égale à 8.

On trouve $S = \{1\,;\, 3\}$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 5$.

On cherche les abscisses des points de la courbe C_f dont l'ordonnée est supérieure à 5.

On trouve, $S = [0; 4]$.

c) Si $x \in [-2\,;\,4]$, donner le meilleur encadrement possible pour $f(x)$.

Graphiquement <u>ou</u> d'après le tableau de variation de f limité à cet intervalle :

x	-2		2		4
$f(x)$	-7	↗	9	↘	5

La fonction f est strictement croissante sur $[-2; 2]$ puis strictement décroissante sur $[2; 4]$.

Elle admet un minimum égal à -7 , atteint pour x = – 2 et un maximum égal à 9 , atteint pour x = 2.

Par conséquent $f(x)$ est compris entre –7 et 9.

Donc pour tout $x \in [-2\,;\,4] : -7 \leqslant f(x) \leqslant 9$

5. Soit g définie par $g(x) = x + 5$.

a) Représenter, sur le graphique donné en annexe, la fonction g.

g est une fonction affine, donc sa représentation graphique est une droite D passant par les points : $A(0;5)$ et $B(3;8)$ car $g(0) = 0 + 5 = 5$ et $g(4) = 3 + 5 = 8$
Voir graphique.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

On cherche les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.
On trouve $S = \{0\,;3\}$.

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

On cherche les abscisses des points de la courbe C_f situés en dessous de la courbe C_g.
On trouve $S = [-2;0[\cup]3;-6[$.

<u>Partie B</u>

On donne maintenant l'expression de la fonction dessinée ci-contre par : $f(x) = 9 - (x-2)^2$.

1. a) Développer et réduire l'expression $f(x)$.

$f(x) = 9 - (x-2)^2 = 9 - (x^2 - 4x + 4) = 9 - x^2 + 4x - 4$
$f(x) = -x^2 + 4x + 5$

b) Factoriser l'expression $f(x)$ et montrer que : $f(x) = (x + 1)(5 - x)$.

$f(x) = 9 - (x-2)^2 = 3^2 - (x-2)^2 = \big(3 - (x-2)\big)\big(3 + (x-2)\big) = (3 - x + 2)(3 + x - 2)$
$f(x) = (-x + 5)(x + 1)$

2. Calculer $f(1)$ et $f(-\sqrt{3})$.

$f(1) = (-1 + 5)(1 + 1) = 4 \times 2 = 8$
$f\left(-\sqrt{3}\right) = -\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 4 \times \left(-\sqrt{3}\right) + 5 = -3 - 4\sqrt{3} + 5 = 2 - 4\sqrt{3}$

3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par f .

On doit résoudre l'équation $f(x) = 0$.
$(-x + 5)(x + 1) = 0$
C'est une équation-produit.
$-x + 5 = 0$ ou $x + 1 = 0$
$x = 5$ ou $x = -1$
Cette équation admet deux solutions – 1 et 5.
<u>Donc</u> 0 admet deux antécédents par la fonction f , qui sont – 1 et 5.
<u>Donc</u> $S = \{-1\,;5\}$

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = 5$ par le calcul.

On doit résoudre $f(x) = 5$
$-x^2 + 4x + 5 = 5$
$-x^2 + 4x = 0$
$x(-x + 4) = 0$
Alors $x = 0$ ou $-x + 4 = 0$
$x = 4$
Donc cette équation admet deux solutions 0 et 2 S = {0 ; 4}

b) On rappelle que $g(x) = x + 5$, résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ par le calcul.

On doit résoudre $f(x) = g(x)$
$-x^2 + 4x + 5 = x + 5$
$-x^2 + 3x = 0$
$x(-x + 3) = 0$
Alors $x = 0$ ou $-x + 3 = 0$
$x = 3$
Donc S = {0 ; 3} (On retrouve le résultat du A5b)

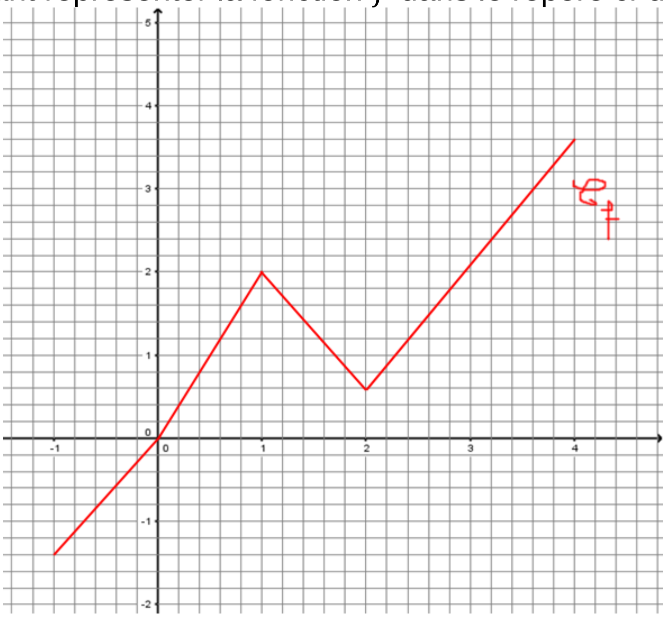
<u>Exercice 6</u> **- 3 points -** **(sur la copie)**

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f .
On sait de plus que la courbe représentative de la fonction f passe par l'origine du repère.

x	-1		1		2		4
$f(x)$	$-1,4$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$0,6$	$\nearrow$	$3,6$

1. Pour chaque situation, entourer la seule bonne réponse parmi les quatre proposées :
   - Le maximum de la fonction f est :
     □ 1 □ 2 ■ 3,6 □ 4
   - Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[1; 4]$ est :
     □ 1,4 □ -1 ■ 0,6 □ 1
   - L'équation $f(x) = 0$ possède exactement :
     □ 0 solution ■ 1 solution □ 2 solutions □ 3 solutions
   - On veut comparer les images $f(1{,}2)$ et $f(1{,}5)$:
     □ $f(1{,}2) < f(1{,}5)$ □ $f(1{,}2) = f(1{,}5)$ ■ $f(1{,}2) > f(1{,}5)$ □ On ne peut rien dire

2. Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f dans le repère ci-dessous.



<u>Exercice 7</u> **- 4 points -** **(sur la copie)**

1. Donner l'ensemble de définition D_C de la fonction carré, puis celui de la fonction inverse D_I .

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R} \; =]-\infty; +\infty[$
La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

2. Quel est le sens de variations de la fonction inverse sur D_C ?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	

3. Si $x \in]-5\,; -3\,[$, à quel intervalle appartient x^2 ? (justifier)

On a $-5 < x < -3$
Alors $(-5)^2 > x^2 > (-3)^2$ car la fonction carrée est décroissante sur $]-\infty\,; 0]$
Donc $25 > x^2 > 9$
Ou $x^2 \in]9; 25[$

4. Si $x \in [5;10[$, à quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$? (justifier)

On a $5 \leq x < 10$

Alors $\frac{1}{5} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{10}$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$

Donc $0{,}2 \geq \frac{1}{x} > 0{,}1$

Ou $\frac{1}{x} \in]0{,}1;0{,}2]$

5. Comparer, en justifiant, $(\pi - 2)^2$ et $(\pi + 1)^2$.

On a $0 < \pi - 2 < \pi + 1$

Alors $(\pi - 2)^2 < (\pi + 1)^2$ car la fonction carrée est croissante sur $]-\infty;0]$

Donc $(\pi - 2)^2 < (\pi + 1)^2$

<u>Exercice 8</u> - 4 points - (sur la copie)

Considérons l'algorithme suivant :

```
Début algorithme
Variables
    x du type nombre
    N du type nombre
Entrée
    Saisir x
    0 → N
Traitement
    Tant que N + 1 ≤ x
        | faire N + 1 → N
    FinTant
    Afficher N
Fin algorithme
```

1. On choisit pour valeur initiale $x = 4{,}8$. Compléter le tableau ci-dessous :

Numéro de passage de la boucle	Valeur de N avant le passage dans la boucle	Valeur de N après le passage dans la boucle	Arrêt de la boucle conditionnelle (oui/non)
1	0	1	non
2	1	2	non
3	2	3	non
4	3	4	non
5	4	on ne passe pas dans la boucle	oui

Combien de passages dans la boucle conditionnelle ont été nécessaires pour l'arrêt de l'algorithme ?

4 passages sont nécessaires

2. Recommencer l'algorithme pour $x = 3$.

Numéro de passage de la boucle	Valeur de N avant le passage dans la boucle	Valeur de N après le passage dans la boucle	Arrêt de la boucle conditionnelle (oui/non)
1	0	1	non
2	1	2	non
3	2	3	non
4	3	on ne passe pas dans la boucle	oui

3. Que donne l'algorithme pour $x = 3{,}5$? on trouve $N = 3$

4. Le nombre N obtenu est appelé la partie entière de x, noté $Ent\,(x)$.

On a donc : $Ent(4{,}8) = 4$ $Ent(3) = 3$ et $Ent(3{,}5) = 3$