LYCÉE VINCENT VAN GOGH FRANÇAIS LA HAYE - AMSTERDAM

DS 3 – 11 DECEMBRE 2015

Durée : 2h **AVEC Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Algèbre		Fonctions			Géométrie			Algo
	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7	Ex 8	Ex 9
/ 30	/ 4	/ 2,5	/ 7	/ 3,5	/ 3,5	/ 2	/ 2	/ 4	/2,5

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Développer des expressions polynomiales simples				
Factoriser des expressions polynomiales simples				
Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression pour résoudre un problème				
Déterminer l'image d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
Rechercher des antécédents d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
Décrire (par un texte ou un tableau de variations) les variations d'une fonction définie par une courbe				
Comparer les images de deux nombres d'un intervalle, lorsque le sens de variation est donné				
Donner le sens de variation d'une fonction affine				
Construire géométriquement la somme de deux vecteurs				
Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.				
Interpréter un algorithme donné				
Rédaction soin				

Exercice 1 - 4 points - (sur la copie)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - (2x-3)^2$.

1. Développer l'expression de $f(x)$.

2. Factoriser l'expression de $f(x)$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 16x - 11$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

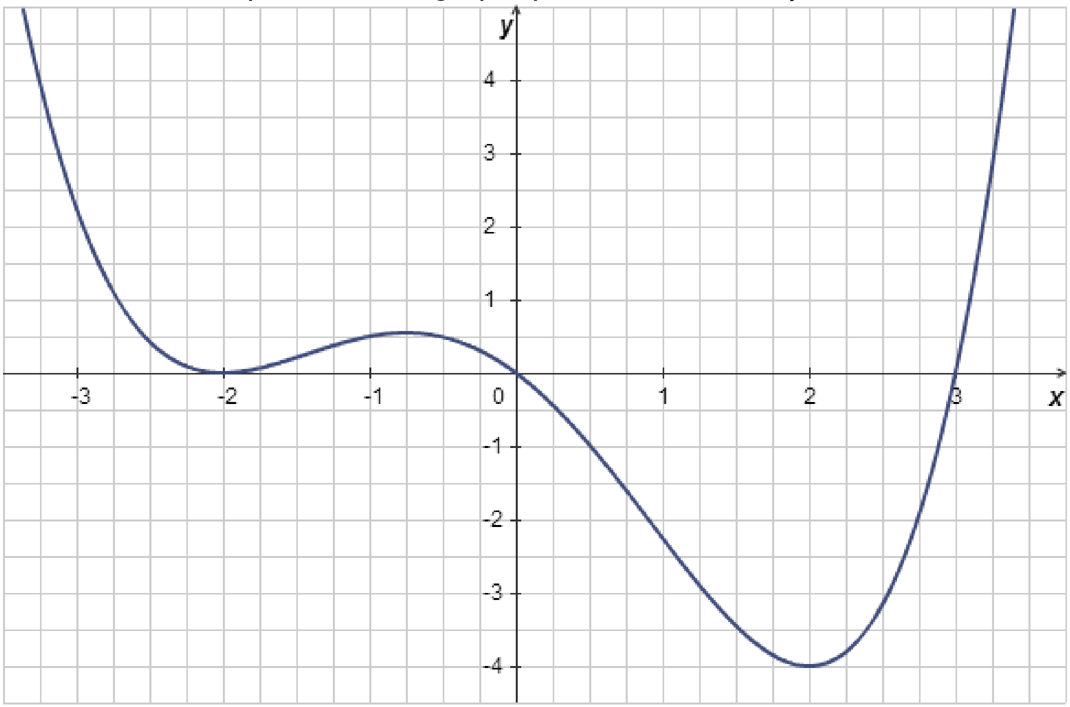
Exercice 2 - 2,5 points - (sur la copie)

Résoudre les inéquations suivantes :

$$3x - (5x+7) \geq 2x - 3 \qquad \frac{2x-5}{3} < \frac{2x-3}{7}$$

Exercice 3 **- 7 points -** **(sur le poly)**

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Le point $A(-0{,}75; y_A)$ est un point de la courbe. Placer le point A.

2. À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

    a. Quelles sont les images des réels −1 et 2 ?

    b. Quel(s) sont les antécédent(s) de 0 ?

    c. Donner le tableau des variations de la fonction f.

3. À partir du graphique ou du tableau des variations de la fonction f, comparer :

    a. $f(-7)$ et $f(-5)$

    b. $f(5)$ et $f(7)$.

4. Est-il possible de comparer les images des réels − 7 et 5 ?

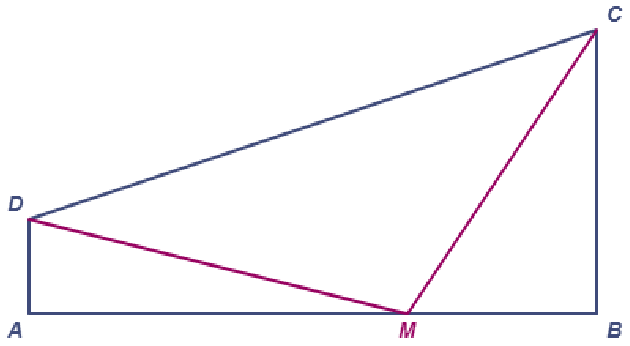
5. Soit a un réel négatif et b un réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$:

    a. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

    b. Peut-on conclure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$? (Justifier)

<u>Exercice 4</u> - 3.5 points - (sur la copie)

ABCD est un trapèze rectangle tel que $AD = 2$, $BC = 6$, $AB = 12$. M est un point du segment [AB]. On note x la distance AM.



1. Exprimer les aires des triangles MAD et MBC en fonction de x.

2. Pour quelle valeur de x ces deux triangles ont-ils la même aire ?

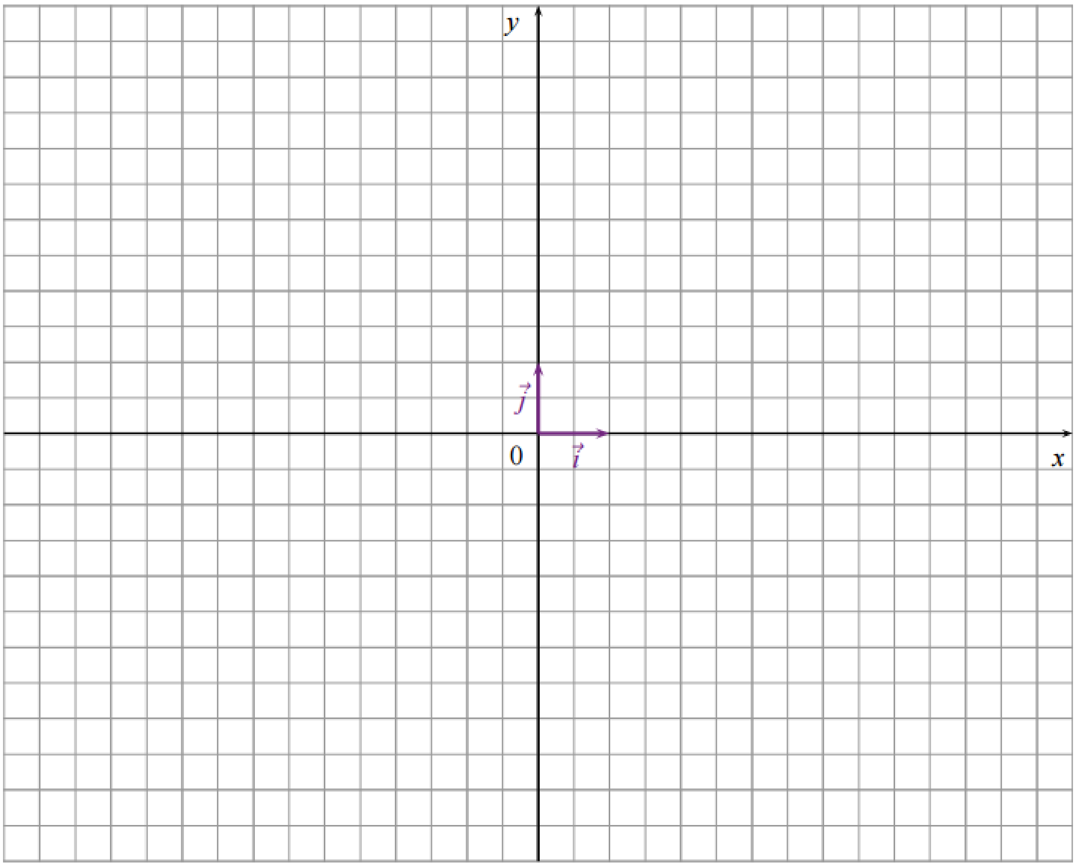
3. Existe-il une valeur de x pour laquelle les trois triangles MAD, MBC et CMD ont la même aire ?

<u>Exercice 5</u> - 3,5 points - (sur la copie sauf la question 2)

Soit f la fonction affine telle que $f(-6) = 5$ et $f(3) = -1$

1. Déterminer l'expression de f en fonction de x.

2. Dans le plan muni du repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative de la fonction f.

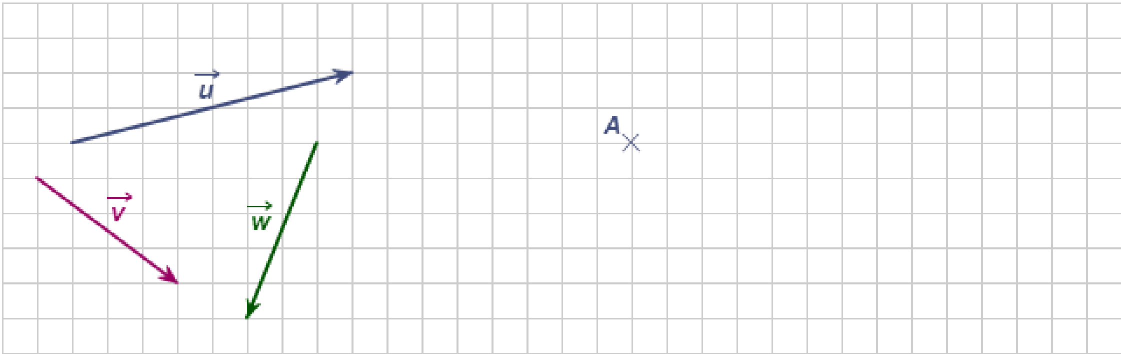


3. Quels sont les antécédents éventuels de 2 ?

4. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

Exercice 6 - 2 points - (sur le poly)

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$.



Exercice 7 - 2 points - (sur la copie)

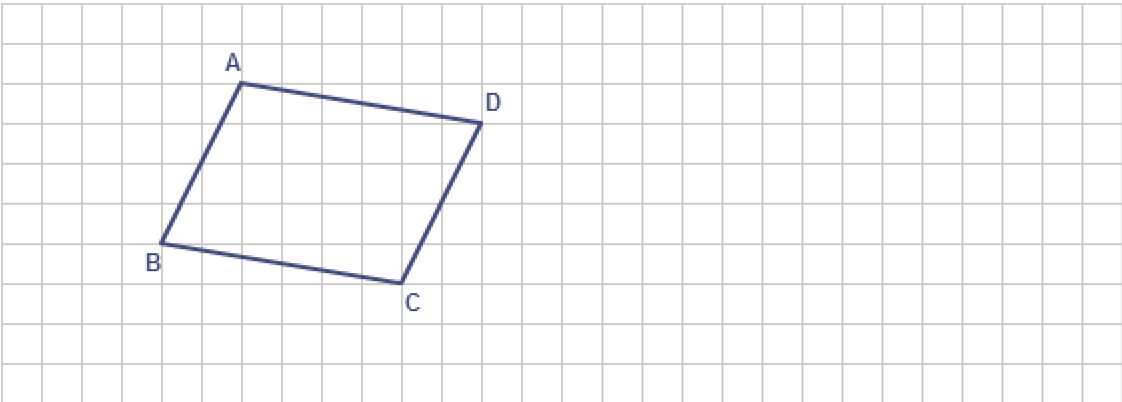
Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Démontrer que $2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AO}$

Exercice 8 - 5 points - (sur la copie sauf la question 1)

ABCD est un parallélogramme.

1. Placer les points les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.



2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3. Montrer que les points E, C et F sont alignés.

Exercice 9 - 2,5 points - (sur le poly)

Pour fêter l'anniversaire de son ouverture, le gérant d'un magasin a décidé de faire une offre promotionnelle lors du passage en caisse.
Soit M le montant que devrait payer le client un jour ordinaire.

Compléter le tableau de valeurs en utilisant cet algorithme

M initial	80	150	180
M final			

N'y-a-t-il pas un problème avec cet algorithme ? Si oui, lequel ?

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE M
  SI (M>=150) ALORS
    DEBUT_SI
    M PREND_LA_VALEUR M-50
    AFFICHER "Le prix à payer est"
    AFFICHER M
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      M PREND_LA_VALEUR M-30
      AFFICHER "Le prix à payer est"
      AFFICHER M
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

CORRECTION : DS 3 – 11 DECEMBRE 2015

Exercice 1 **- 4 points -** **(sur la copie)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - (2x-3)^2$.

1. Développer l'expression de $f(x)$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (2x-3)^2 &= (x^2+4x+4) - (4x^2-12x+9)\\ &= x^2+4x+4-4x^2+12x-9\\ &= -3x^2+16x-5\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x, $f(x) = -3x^2+16x-5$

2. Factoriser l'expression de $f(x)$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - (2x-3)^2 &= [(x+2)-(2x-3)] \times [(x+2)+(2x-3)]\\ &= (x+2-2x+3)(x+2+2x-3)\\ &= (-x+5)(3x-1)\end{aligned}$$

Pour tout réel x, $f(x) = (-x+5)(3x-1)$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 16x - 11$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f(x) = 16x-11 &\Leftrightarrow -3x^2+16x-5 = 16x-11\\ &\Leftrightarrow -3x^2+6 = 0\\ &\Leftrightarrow -3(x^2-2) = 0\\ &\Leftrightarrow x^2-2 = 0\\ &\Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}\end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 16x - 11$ est $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\Leftrightarrow (-x+5)(3x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow -x+5 = 0 \quad \text{ou} \quad 3x-1 = 0\\ &\Leftrightarrow x = 5 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'ensemble S des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $S = \{5; \frac{1}{3}\}$.

Exercice 2 **- 2,5 points -** **(sur la copie)**

Résoudre les inéquations suivantes :

$\boldsymbol{3x - (5x+7) \geq 2x - 3}$

$3x - 5x - 7 \geq 2x - 3$

$-2x - 7 \geq 2x - 3$

$-7 + 3 \geq 2x + 2x$

$-4 \geq 4x$

$\frac{-4}{4} \geq x$

$-1 \geq x$

$S =]-\infty; -1]$

$\boldsymbol{\frac{2x-5}{3} < \frac{2x-3}{7}}$

$\frac{7 \times (2x-5)}{7 \times 3} < \frac{3 \times (2x-3)}{3 \times 7}$

$\frac{14x-35}{21} < \frac{6x-9}{21}$

$14x - 35 < 6x - 9$

$14x - 6x < 35 - 9$

$8x < 26$

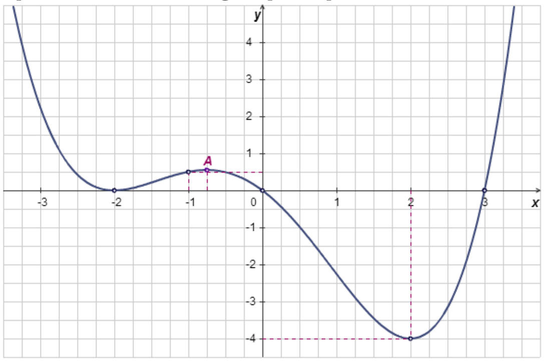
$x < \frac{26}{8}$

$x < \frac{13}{4}$

$S = \left]-\infty; \frac{13}{4}\right[$

Exercice 3 **- 7 points -** **(sur la copie)**

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1. Le point $A(-0,75; y_A)$ est un point de la courbe. Placer le point A.

2. À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Quelles sont les images des réels −1 et 2 ?

Le point de la courbe d'abscisse −1 a pour ordonnée 0,5 donc $f(-1) = 0,5$
Le point de la courbe d'abscisse 2 a pour ordonnée −4 donc $f(2) = -4$

b. Quel(s) sont les antécédent(s) de 0 ?

La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en trois points d'abscisses respectives −2, 0 et 3 donc
Les antécédents de 0 par f sont −2; 0; 3.

c. Donner le tableau des variations de la fonction f.

Avec la précision permise par le dessin, le tableau des variations de la fonction f est :

x	$-\infty$		-2		$-0{,}75$		2		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	yA	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3. À partir du graphique ou du tableau des variations de la fonction f, comparer :

a. $f(-7)$ et $f(-5)$

Sur l'intervalle $]-\infty; -2]$, la fonction f est strictement décroissante
Comme $-7 < -5$ donc $f(-7) > f(-5)$

b. $f(5)$ et $f(7)$.

Sur l'intervalle $[3; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante
Comme $5 < 7$ donc $f(5) < f(7)$

4. Est-il possible de comparer les images des réels − 7 et 5 ?

La représentation graphique permet juste de dire que les images des réels − 7 et 5 sont des réels supérieurs à 5.
Les informations fournies ne permettent pas de comparer $f(-7)$ et $f(5)$.

5. Soit a un réel négatif et b un réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$:

a. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

a est un réel négatif donc $f(a) \geqslant 0$
b est un réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$ donc $f(b) \leqslant 0$
Ainsi, si a un réel négatif et b un réel appartenant à l'intervalle $[0; 2]$ alors $f(a) \geqslant f(b)$

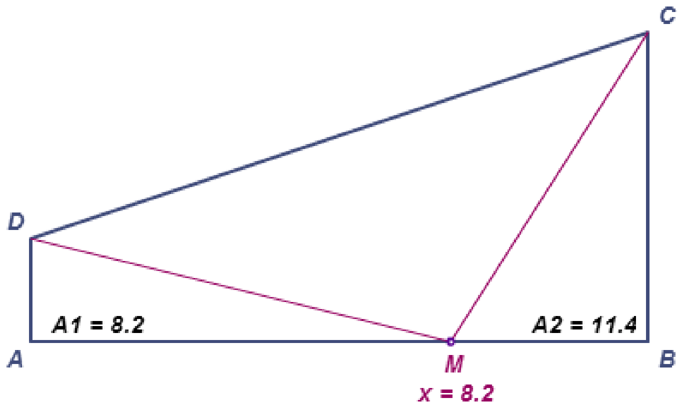
b. Peut-on conclure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$? (Justifier)

Dire que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ signifie que pour tous réels a et b de l'intervalle]−∞;2]si $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$.

La fonction f n'est pas décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ car elle n'est pas monotone sur cet intervalle.

Exercice 4 - 3.5 points - (sur la copie)

ABCD est un trapèze rectangle tel que $AD = 2$, $BC = 6$, $AB = 12$. M est un point du segment [AB].
On note x la distance AM.



1. Exprimer les aires des triangles MAD et MBC en fonction de x.

- Le triangle MAD est rectangle en A donc son aire est : $A_{MAD} = \frac{MA \times AD}{2} = \frac{x \times 2}{2} = x$
- Le triangle MBC est rectangle en B donc son aire est : $A_{MBC} = \frac{MB \times BC}{2} = \frac{(12-x) \times 6}{2} = 36 - 3x$

Les aires des triangles MAD et MBC sont respectivement $A_{MAD} = x$ et $A_{MBC} = 36 - 3x$

2. Pour quelle valeur de x ces deux triangles ont-ils la même aire ?

On a M est un point du segment [AB]
Alors les triangles MAD et MBC ont la même aire pour les réels x de l'intervalle]0;12[solutions de l'équation

$$x = 36 - 3x \quad \Leftrightarrow \quad x + 3x = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9$$

Les triangles MAD et MBC ont la même aire pour $x = 9$

3. Existe-il une valeur de x pour laquelle les trois triangles MAD, MBC et CMD ont la même aire ?

L'aire du trapèze rectangle ABCD est : $A_{ABCD} = \frac{(AD+BC) \times AB}{2} = \frac{(2+6) \times 12}{2} = 48$

Dire que les trois triangles MAD, MBC et CMD ont la même aire signifie que l'aire du trapèze est égale au triple de l'aire du triangle MAD.
Il s'agit donc de déterminer le réel x de l'intervalle]0;12[solution de l'équation

$$3x = 48 \quad \Leftrightarrow \quad x = 16$$

Or $16 \notin]0;12[$
Donc il n'existe pas de valeur de x pour laquelle les trois triangles MAD, MBC et CMD ont la même aire.

Exercice 5 **- 3,5 points -** **(sur la copie)**

Soit f la fonction affine telle que $f(-6) = 5$ et $f(3) = -1$

1. Déterminer l'expression de f en fonction de x.

f est une fonction affine alors pour tout réel x, $f(x) = mx + p$

avec $m = \frac{f(3)-f(-6)}{3-(-6)} = \frac{-1-5}{3+6} = -\frac{2}{3}$

D'où $f(x) = -\frac{2}{3}x + p$

Comme $f(3) = -1$ $\quad -1 = -\frac{2}{3} \times 3 + p$

$-1 = -2 + p$

$-1 + 2 = p$

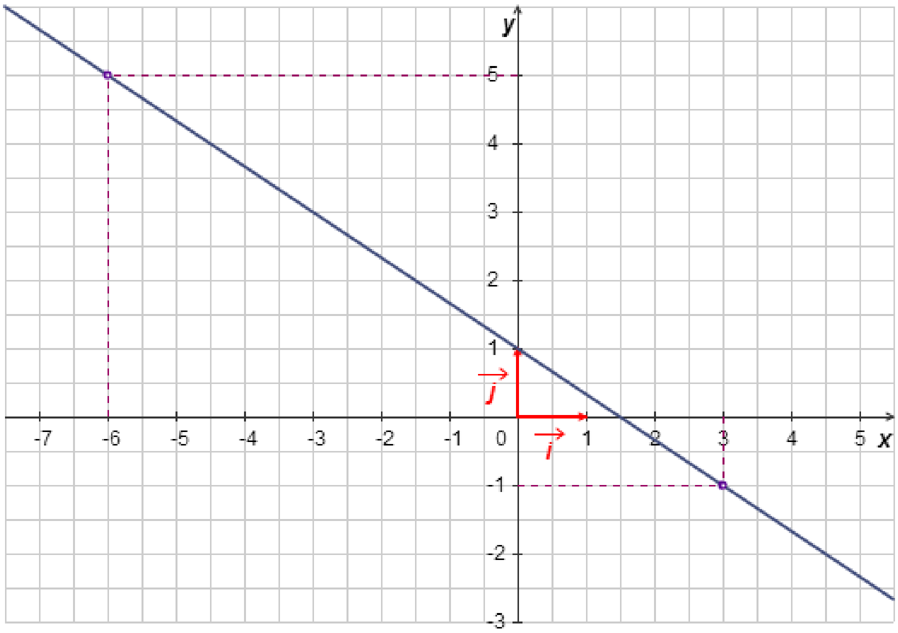
$1 = p$

Ainsi, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{2}{3}x + 1$

2. Dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer la courbe représentative de la fonction f.

La courbe représentative de la fonction affine f est la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

Cette droite passe par les points de coordonnées (−6;5) et (3;−1).



3. Quels sont les antécédents éventuels de 2 ?

Les antécédents éventuels de 2 sont les réels x solutions de l'équation $f(x) = 2$

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x + 1 = 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

2 a pour antécédent $-\frac{3}{2}$

4. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, comparer $f(a)$ et $f(b)$.

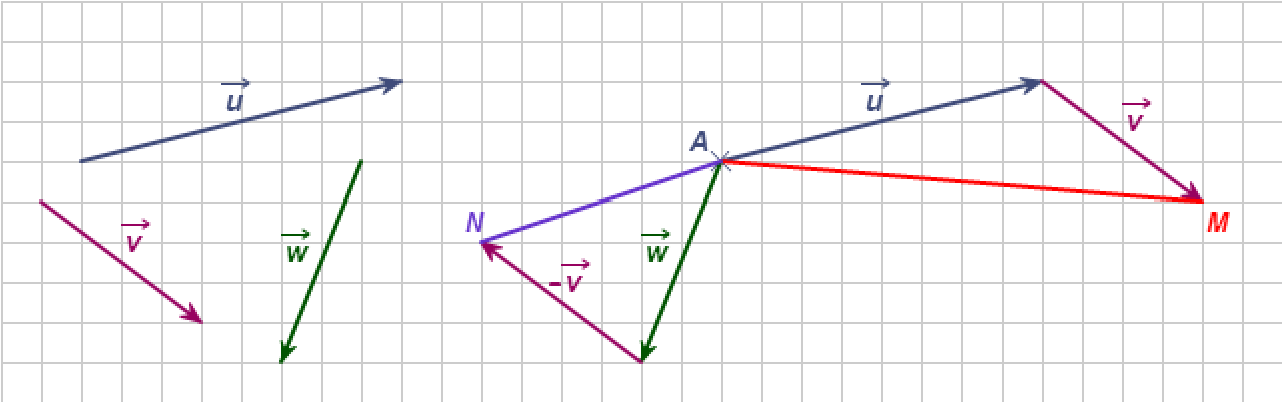
L'accroissement moyen de la fonction affine f est égal à $-\frac{2}{3}$

D'où f est une fonction strictement décroissante.

Donc pour tous réels a et b si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$

<u>Exercice 6</u> - 2 points - (sur la copie)

Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = \vec{w} - \vec{v}$.



<u>Exercice 7</u> - 2 points - (sur la copie)

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

Démontrer que $2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AO}$

Comme ABCD est un parallélogramme de centre O

Alors • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

• O est le milieu de [AC] et [BD] $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BD}$

On calcule $2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$

$= 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

$= 2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ ABCD est un parallélogramme

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AC}$ O est le milieu de [AC]

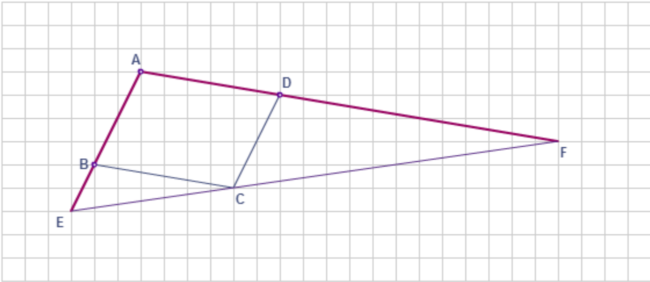
$= 2\,\overrightarrow{AO}$

On a bien démontré l'égalité demandée : $2\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = 2\,\overrightarrow{AO}$

<u>Exercice 8</u> - 5 points - (sur la copie)

ABCD est un parallélogramme.

1. Placer les points les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.



2. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ Relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ ABCD est un parallélogramme

$= \left(\frac{3}{2} - 1\right)\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ Relation de Chasles

$= -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AD}$ ABCD est un parallélogramme

$= -\overrightarrow{AB} + (3 - 1)\overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

3. Montrer que les points E, C et F sont alignés.

<u>Nous avons</u> $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

et $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

<u>Donc</u> $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

<u>Ainsi</u>, les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires

<u>Donc</u> les points E, C et F sont alignés.

<u>Exercice 9</u> - 2,5 points - (sur la copie)

Pour fêter l'anniversaire de son ouverture, le gérant d'un magasin a décidé de faire une offre promotionnelle lors du passage en caisse.

Soit M le montant que devrait payer le client un jour ordinaire.

```
Code de l'algorithme
VARIABLES
  M EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE M
  SI (M>=150) ALORS
    DEBUT_SI
    M PREND_LA_VALEUR M-50
    AFFICHER "Le prix à payer est"
    AFFICHER M
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      M PREND_LA_VALEUR M-30
      AFFICHER "Le prix à payer est"
      AFFICHER M
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

Compléter le tableau de valeurs en utilisant cet algorithme

M initial	80	150	180
M final	$80 - 30 = 50$	$150 - 50 = 100$	$180 - 50 = 130$

N'y-a-t-il pas un problème avec cet algorithme ? Si oui, lequel ?

Il manque dans cet algorithme une condition correspondant au fait que M doit être supérieur à 30 € pour que ce soit valide !!