DS 2 – 13 NOVEMBRE 2015

Durée : 2h **SANS Calculatrice**

NOM : **Prénom :**

La notation tiendra compte de la présentation, ainsi que de la précision de la rédaction et de l'argumentation.
Aucun prêt n'est autorisé entre les élèves.

Bilan	Algèbre			Fonctions			Géométrie	
	Ex 1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7	Ex 8
/ 30	/ 1,5	/ 6	/ 3,5	/ 5	/ 5,5	/ 2,5	/ 12	/ 3

	Acquis	+ ou -	Non acquis	Non fait
Identifier la forme la plus adéquate (développée, factorisée) d'une expression pour résoudre un problème				
Identifier un ensemble de définition (à partir d'une courbe, un tableau ou une formule)				
Déterminer l'image d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
Rechercher des antécédents d'un nombre par tableau ou lecture graphique				
Déterminer le minimum ou le maximum d'une fonction sur un intervalle				
Décrire (par un texte ou un tableau de variations) les variations d'une fonction définie par une courbe				
Dessiner une représentation graphique compatible avec un tableau de variations				
Calculer la distance de deux points connaissant leurs coordonnées.				
Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.				
Utiliser les coordonnées du milieu d'un segment pour démontrer				
Utiliser la notation "k vec(u)" (calcul de coordonnées, construction géométrique)				
Répondre par une phrase claire				

Exercice 1 **- 1,5 points -** **(sur la copie)**

Le nombre -3 est-il solution de l'équation $-x^2 - x + 6 = 0$?

Exercice 2 **- 6 points -** **(sur la copie)**

On donne l'expression de la fonction f définie par $f(x) = 4 - (x-1)^2$.

1. a) Développer et réduire l'expression $f(x)$.

   b) Factoriser l'expression $f(x)$ et montrer que : $f(x) = (x+1)(3-x)$.

2. Calculer $f(2)$ et $f\left(-\sqrt{3}\right)$.

3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par $f(x)$.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = 3$ par le calcul.

   b) On pose $h(x) = 2x + 1$, résoudre l'équation $f(x) = h(x)$.

Exercice 3 **- 3,5 points -** **(sur la copie)**

Résoudre les inéquations suivantes : a) $-4x + 6 < 3x + 20$ b) $\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{2x-1}{15} + \dfrac{1}{3}$

Exercice 4 **- 5,5 points -** **(sur le poly)**

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction g .
On sait de plus que la courbe représentative de la fonction g passe par l'origine du repère.

x	-1		1		2		4
Variations de g	$-1,4$	↗	$3,6$	↘	$-0,6$	↗	2

Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ? ……………………………………………………………..

Quel est maximum de la fonction g sur son ensemble de définition ?

………

Quel est minimum de la fonction g sur $[1; 4]$?

………

Quelles sont les variations de la fonction g sur $[-1; 2]$?

………

Comparer les images $g(1,2)$ et $g(1,5)$:

………

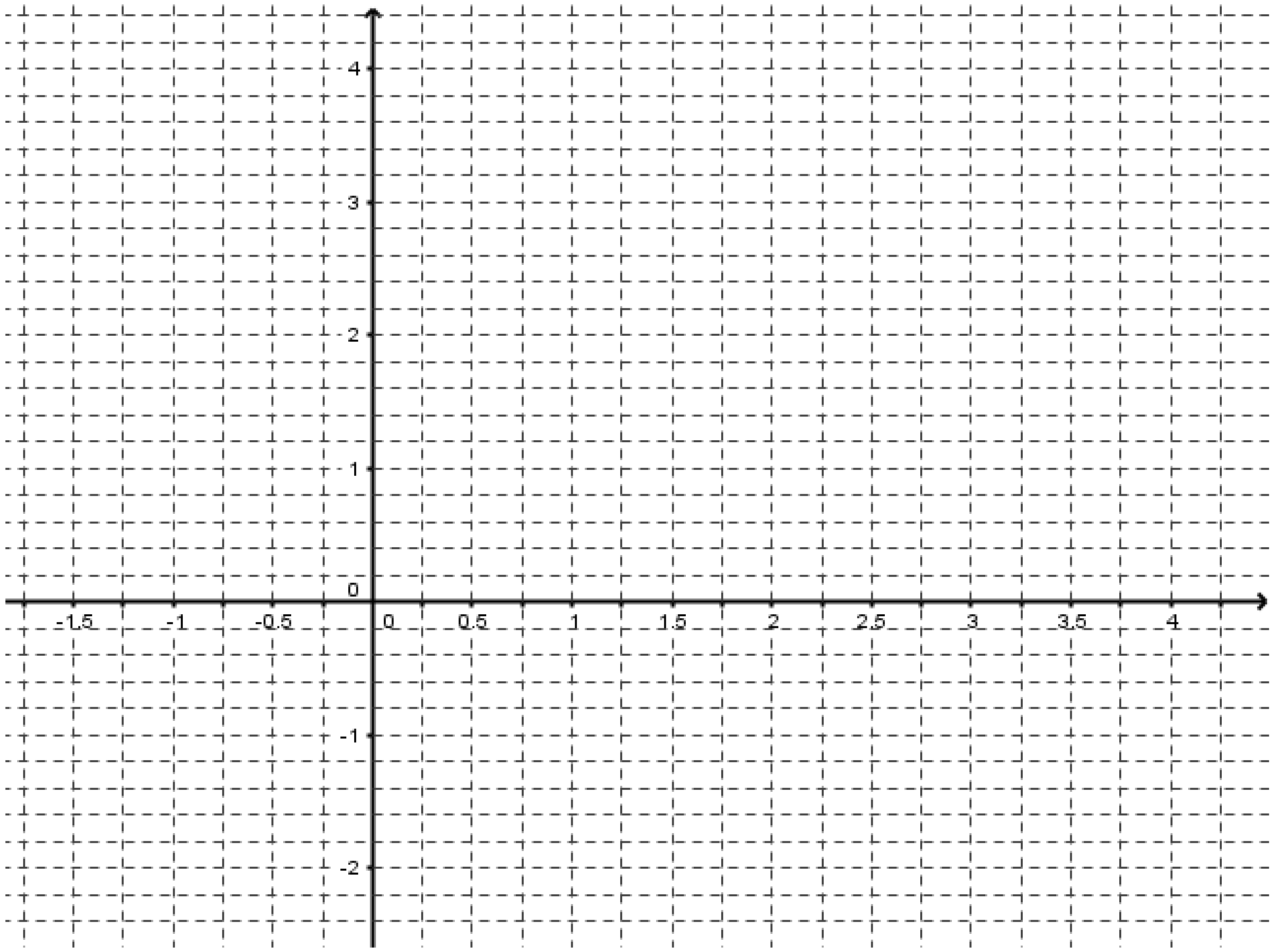
………

………

………

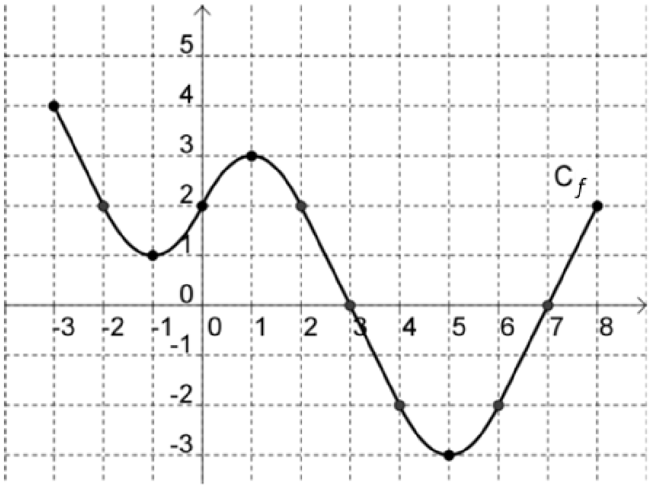
………

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction g dans le repère ci-dessous.



Exercice 5 **- 5 points -** **(sur le poly)**

Voici la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.



1. Compléter :

a) Donner l'ensemble de définition de f : ……………..

b) L'image de – 1 par la fonction f est ………..

c) $f(-2) =$ ………………

d) Les éventuels antécédents de 2 par la fonction f : ………………….

e) Le minimum de f sur son ensemble de définition est …….

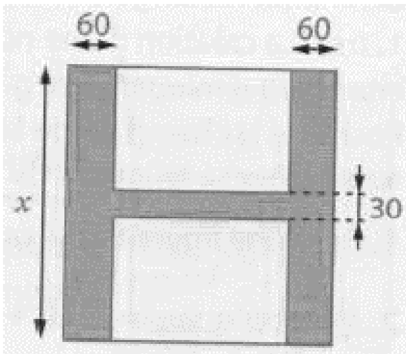
f) Le maximum de f sur [0 ; 8] est ………

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f

Exercice 6 **- 2,5 + 1,5 points -** **(sur la copie)**

Harry a fabriqué son initiale dans une plaque cartonnée carrée suivant le modèle ci-contre. Il remarque que l'aire de la surface cartonnée non utilisée est de 16 200 mm².

Il demande à Yves de trouver la longueur du côté du carré notée x. Les longueurs sont exprimées en mm et on sait, de plus, que x est compris entre 130 et 220 mm.



Pour l'aider, il lui donne l'aire $A(x)$ des parties cartonnées non utilisées en fonction de x :

$$A(x) = x^2 - 150\,x + 3\,600$$

Yves utilise alors sa calculatrice pour visualiser la représentation graphique de la fonction A, puis conjecturer la réponse demandée.

Suivez sa démarche :

• dans un premier temps, on précisera les réglages utilisés et on donnera l'allure de la courbe obtenue sur l'écran de la calculatrice (dans les deux rectangles ci-dessous).

• dans un second temps, conjecturez la valeur de x recherchée (on précisera la démarche utilisée)

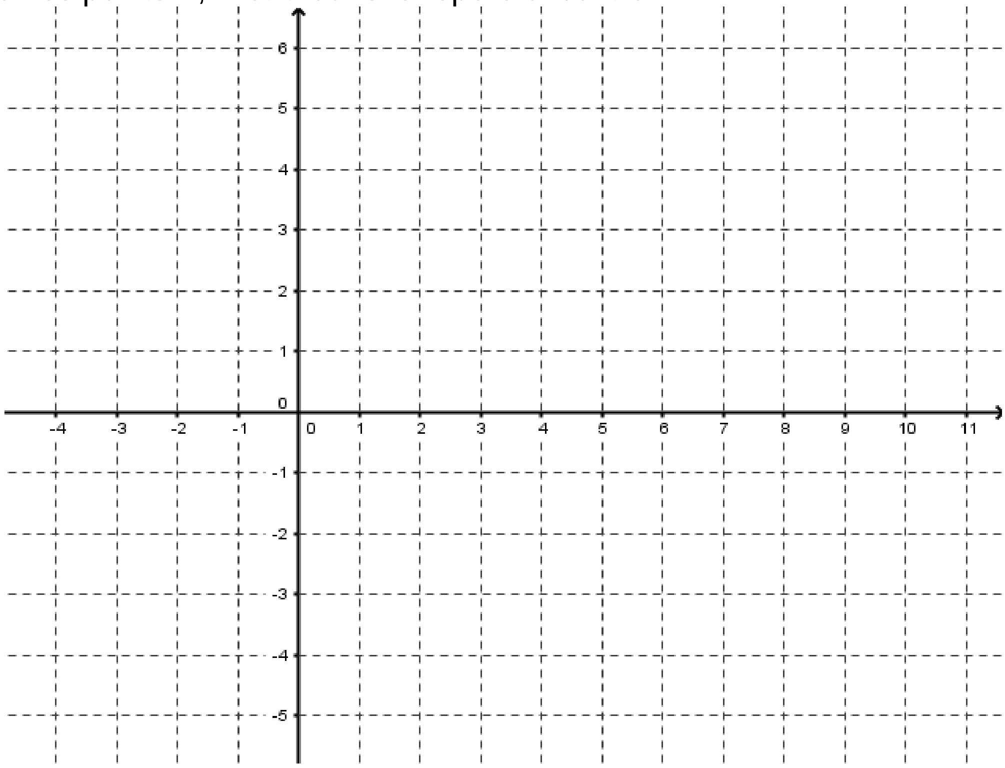
BONUS : Pouvez-vous retrouver comme Harry que $A(x) = x^2 - 150\,x + 3\,600$?

<u>Exercice 7</u> - 12 points - **(sur la copie sauf le graphique)**

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points suivants :

$A\,(-1\,;\,-3)$, $B\,(7\,;\,-1)$ et $C\,(6\,;\,3)$.

1) Placer les points A, B et C dans le repère ci-contre.



On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2) On admet que $AB = \sqrt{68}$ et $BC = \sqrt{17}$.
Calculer AC, puis en déduire la nature du triangle ABC.

3) Calculer les coordonnées du milieu K de [AC].

4) Déterminer les coordonnées du point D, symétrique de B par rapport à K.

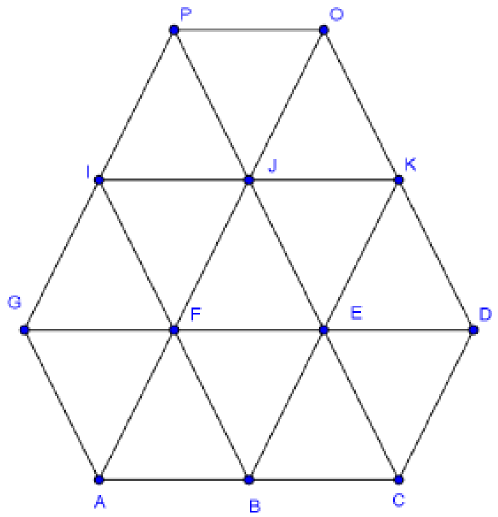
5) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

6) Calculer l'aire du rectangle ABCD et en déduire que l'aire du triangle ACD est égale à 17.

7) La droite perpendiculaire à (AC) passant par D, coupe (AC) en E.
En vous servant de l'aire de ACD, déterminer la longueur DE.

<u>Exercice 8</u> - 3 points - **(sur le poly)**

La figure ci-dessous est constituée de triangles isocèles de mêmes dimensions.



1. Donner un vecteur égal à $\overrightarrow{PE}$.

…………………………………………………

2. Donner deux vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FE}$.

…………………………………………………

3. Recopier sur la copie les égalités suivantes et compléter :

a) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{E..}$

b) $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{G..}$

c) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{\ldots}$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{\ldots}$

DS 2 – 13 NOVEMBRE 2015

<u>Exercice 1</u> - 1,5 points -

Le nombre -3 est-il solution de l'équation $-x^2 - x + 6 = 0$?

$-(-3)^2 - (-3) + 6 = -9 + 3 + 6 = 0$

Donc -3 est une solution de l'équation $-x^2 - x + 6 = 0$

<u>Exercice 2</u> - 6 points -

On donne l'expression de la fonction f définie par $f(x) = 4 - (x-1)^2$.

1. a) Développer et réduire l'expression $f(x)$.

$f(x) = 4 - [x^2 - 2x + 1]$

$f(x) = 4 - x^2 + 2x - 1$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) Factoriser l'expression $f(x)$ et montrer que : $f(x) = (x+1)(3-x)$.

$f(x) = 4 - (x-1)^2$

$f(x) = 2^2 - (x-1)^2$

$f(x) = [2 + (x-1)][2 - (x-1)]$

$f(x) = (2 + x - 1)(2 - x + 1)$

$f(x) = (x+1)(3-x)$

2. Calculer $f(2)$ et $f(-\sqrt{3})$.

Calcul de $f(2)$ On utilise l'expression factorisée $f(2) = (2+1)(3-2) = 3 \times 1 = 3$

Calcul de $f(-\sqrt{3})$ On utilise l'expression développée

$f(-\sqrt{3}) = -(-\sqrt{3})^2 + 2 \times (-\sqrt{3}) + 3 = -3 - 2\sqrt{3} + 3 = -2\sqrt{3}$

3. Déterminer par le calcul les antécédents de 0 par $f(x)$.

On doit résoudre l'équation $f(x) = 0$.

On utilise l'expression factorisée.

<u>Donc</u> $(x+1)(3-x) = 0$

C'est une équation-produit

<u>Donc</u>, d'après le théorème du produit nul : $x + 1 = 0$ ou $3 - x = 0$

<u>Donc</u> $x = -1$ ou $x = 3$

<u>Conclusion :</u> 0 admet deux antécédents par la fonction , qui sont : – 1 et 3.

4. a) Résoudre l'équation $f(x) = 3$ par le calcul.

On doit résoudre $f(x) = 3$ par le calcul.

On utilise l'expression développée réduite

Ce qui revient à résoudre l'équation : $-x^2 + 2x + 3 = 3$

$-x^2 + 2x = 0$

Je factorise : $x(-x + 2) = 0$

C'est une équation-produit.

Donc, d'après le théorème du produit nul : $x = 0$ ou $-x + 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = 2$

Cette équation admet deux solutions 0 et 2.

<u>Conclusion :</u> $S = \{0 ; 2\}$.

b) On pose $h(x) = 2x + 1$, résoudre l'équation $f(x) = h(x)$.

On doit résoudre $f(x) = h(x)$

J'utilise l'expression développée réduite de $f(x)$.

Ce qui revient à résoudre l'équation : $-x^2 + 2x + 3 = 2x + 1$

$-x^2 + 2x + 3 - 2x - 1 = 0$

$-x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 2$

Donc $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$

<u>Conclusion :</u> $\boldsymbol{S = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}}$

Exercice 3 **- 3,5 points -**

Résoudre les inéquations suivantes : a) $-4\,x + 6 < 3\,x + 20$ b) $\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{2x-1}{15} + \dfrac{1}{3}$

$-4\,x + 6 < 3\,x + 20$ *On regroupe les termes*

$-4\,x - 3\,x < -6 + 20$ *On réduit*

$-7\,x < 14$

$x > \dfrac{14}{-7}$ *On divise par –7.*
Attention – 7 est négatif. Je dois changer le sens de l'inégalité :

$x > -2$

Donc L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\boldsymbol{S} =]-\mathbf{2}; +\infty[$

$\dfrac{x-1}{5} + \dfrac{1}{3} \geqslant \dfrac{2x-1}{15} + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{x-1}{5} \geqslant \dfrac{2x-1}{15}$ *On soustrait $\frac{1}{3}$ des 2 côtés*

$\dfrac{3 \times (x-1)}{3 \times 5} \geqslant \dfrac{2x-1}{15}$ *On réduit au même dénominateur*

$\dfrac{3(x-1)}{15} \geqslant \dfrac{2x-1}{15}$

$3(x-1) \geqslant 2x - 1$ *On multiplie tout par 15.*

$3x - 3 \geqslant 2x - 1$ *On développe*

$3x - 2x \geqslant 3 - 1$ *On regroupe*

$x \geqslant 2$ *Et on conclus*

Conclusion : L'ensemble des solutions de cette inéquation est : $\boldsymbol{S} = [\mathbf{2}; +\infty[$

Exercice 4 **- 5,5 points -**

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction g .
On sait de plus que la courbe représentative de la fonction g passe par l'origine du repère.

x	- 1		1		2		4
Variations de g	- 1,4	↗	3,6	↘	- 0,6	↗	2

Quel est l'ensemble de définition de la fonction g ? $D_g = [-1; 4]$

Quel est maximum de la fonction g sur son ensemble de définition ?

Sur $[-1; 4]$, la fonction g admet comme maximum en $x = 1$ qui vaut 3,6

Quel est minimum de la fonction g sur $[\mathbf{1}; \mathbf{4}]$?

Sur $[1; 4]$, la fonction g admet un minimum en $x = 2$ qui vau $-0{,}6$

Quelles sont les variations de la fonction g sur $[-\mathbf{1}; \mathbf{2}]$?

La fonction g est croissante sur $[-1; 1]$ puis décroissante sur $[1; 2]$.

Comparer les images $g(\mathbf{1{,}2})$ et $g(\mathbf{1{,}5})$:

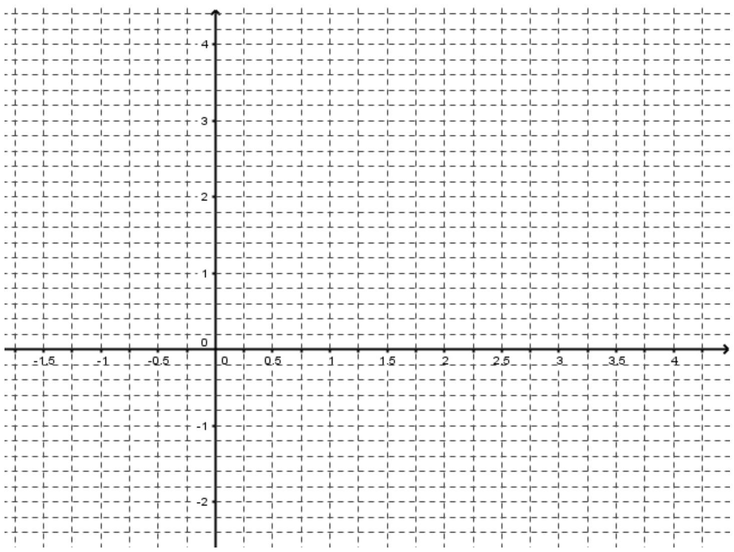
La fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$

Alors l'ordre de l'inégalité change

Donc $1{,}2 < 1{,}5$

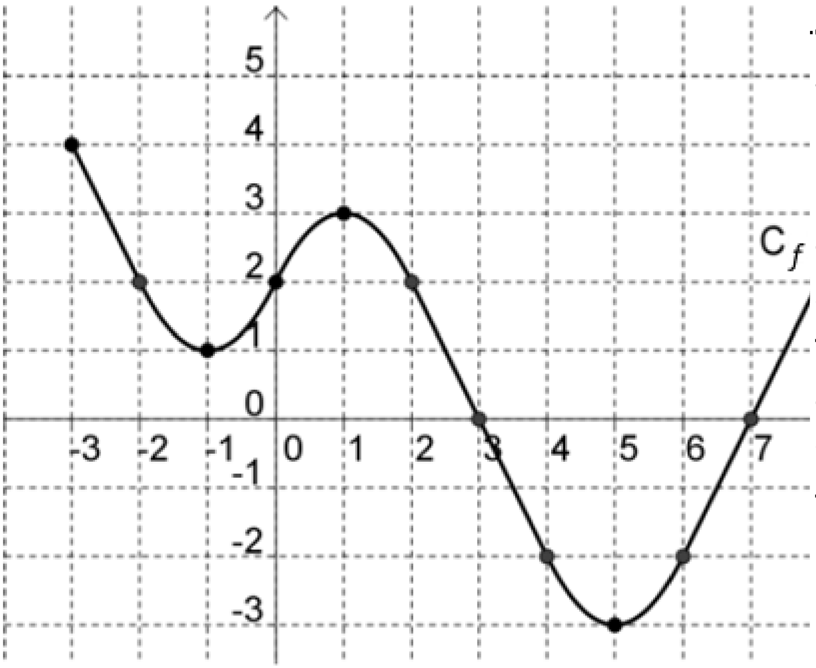
$g(1{,}2) > g(1{,}5)$

Tracer une courbe pouvant représenter la fonction $g$dans le repère ci-dessous.



<u>Exercice 5</u> - 5 points -

Voici la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.



.. Compléter :

a) Donner l'ensemble de définition de f :

[– 3 ; 8]

b) L'image de – 1 par la fonction f est 1

c) $f(-2) =$ 2

d) Les éventuels antécédents de 2 par la fonction f : – 2 ; 0 ; 2 et 8

e) Le minimum de f sur son ensemble de définition est – 3

f) Le maximum de f sur [0 ; 8] est 3

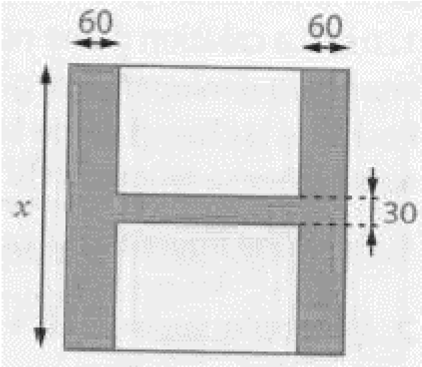
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f

x	– 3		– 1		1		5		8
Variation de f	4	↘	1	↗	3	↘	– 3	↗	2

Exercice 6 **- 2,5 + 1,5 points -**

Harry a fabriqué son initiale dans une plaque cartonnée carrée suivant le modèle ci-contre. Il remarque que l'aire de la surface cartonnée non utilisée est de 16 200 mm².

Il demande à Yves de trouver la longueur du côté du carré notée x.
Les longueurs sont exprimées en mm et on sait, de plus, que x est compris entre 130 et 220 mm.



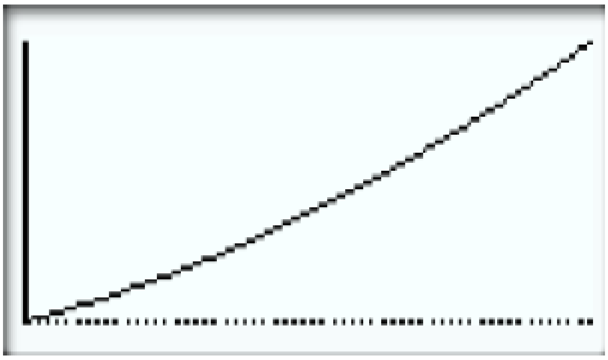
Pour l'aider, il lui donne l'aire $A(x)$ des parties cartonnées non utilisées en fonction de x :

$$A(x) = x^2 - 150\,x + 3\,600$$

Yves utilise alors sa calculatrice pour visualiser la représentation graphique de la fonction A, puis conjecturer la réponse demandée.

Suivez sa démarche :

- **dans un premier temps, on précisera les réglages utilisés et on donnera l'allure de la courbe obtenue sur l'écran de la calculatrice (dans les deux rectangles ci-dessous).**



Xmin = 130
Xmax = 220

Puis on utilise le zoom
Ymin = 1000
Ymax = 19000

- **dans un second temps, conjecturez la valeur de x recherchée (on précisera la démarche utilisée)**

<u>Méthode 1 :</u> avec la courbe et trace
On déplace le curseur pour avoir y = 16 200 et chercher le x correspondant.
On veut que A(x) = 16 200, la réponse est x= 210.

<u>Méthode 2 :</u> avec la table
On déplace le curseur pour avoir y = 16 200 et chercher le x correspondant.
On veut que A(x) = 16 200, la réponse est x= 210.

BONUS : Pouvez-vous retrouver comme Harry que $\boldsymbol{A(x) = x^2 - 150\,x + 3\,600}$?

$A(x)$ est égal à l'aire totale (c'est-à-dire x^2) moins l'aire de la lettre H.

L'aire de la lettre H est égale à $B(x)$:

$B(x) = 2 \times (x \times 60) + 30 \times (x - 2 \times 60)$
$= 120\,x + 30 \times (x - 120)$
$= 120\,x + 30\,x - 3600$
$= 15\,0\,x - 3600$

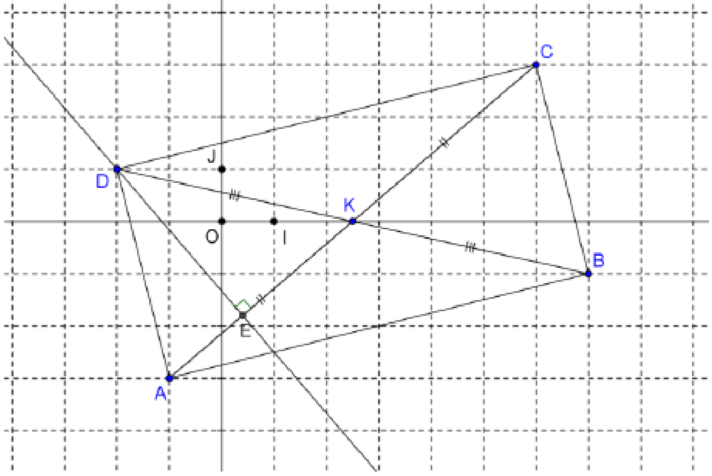
Ainsi $A(x) = x^2 - B(x) = x^2 - (150\,x - 3600)$
Donc $A(x) = x^2 - 150x + 3\,600$

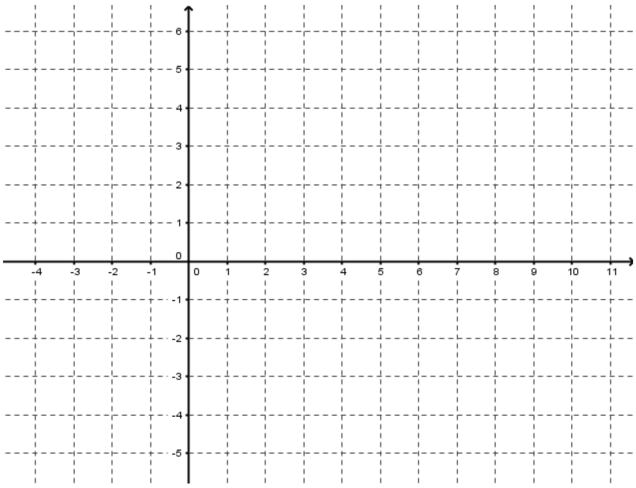
<u>Exercice 7</u>   - 12 points -

Dans un plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points suivants :

$$A\,(-1\,;\,-3),\ \ B\,(7\,;\,-1)\ \ \text{et}\ \ C\,(6\,;\,3).$$

1) Placer les points A, B et C dans le repère ci-contre.





On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

2) On admet que $AB = \sqrt{68}$ et $BC = \sqrt{17}$.
Calculer AC, puis en déduire la nature du triangle ABC.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$

$AC = \sqrt{\left(6-(-1)\right)^2 + \left(3-(-3)\right)^2}$

$AC = \sqrt{(6+1)^2 + (3+3)^2}$

$AC = \sqrt{7^2 + 6^2}$

$AC = \sqrt{49 + 36}$

$AC = \sqrt{85}$

Dans le triangle ABC, [AC] est le plus grand côté.

<u>D'une part</u> $AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{68}\right)^2 + \left(\sqrt{17}\right)^2 = 68 + 17 = 85$

<u>D'autre part</u> $AC^2 = \left(\sqrt{85}\right)^2 = 85$

<u>Donc</u> $AB^2 + BC^2 = AC^2$

<u>D'après</u> la réciproque du théorème de Pythagore,

<u>On conclut que</u> le triangle ABC est rectangle en B

3) Calculer les coordonnées du milieu K de [AC].

<u>Comme</u> K est le milieu de [AC]

<u>Alors</u> $x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+6}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-3+3}{2} = \frac{0}{2} = 0$

<u>Donc</u> $K\,(2{,}5\,;\,0)$

4) Déterminer les coordonnées du point D, symétrique de B par rapport à K.

<u>On sait que</u> D est le symétrique de B par rapport à K

<u>Comme</u> K est le milieu de [BD]

<u>Alors</u> $x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$ $2{,}5 = \frac{7 + x_D}{2}$ $2 \times 2{,}5 = 7 + x_D$ $5 = 7 + x_D$ $x_D = 5 - 7 = -2$

$y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$ $0 = \frac{-1 + x_D}{2}$ $2 \times 0 = -1 + x_D$ $0 = -1 + x_D$ $x_D = 0 + 1 = 1$

<u>Donc</u> $D\,(-2\,;\,1)$

5) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.

Dans le quadrilatère ABCD

<u>On sait que</u> K est le milieu de [AC]

K est aussi le milieu de [BD].

<u>Or</u> Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme

<u>Donc</u> ABDC est un parallélogramme

<u>De plus</u> le triangle ABC est rectangle en B.

<u>Or</u> Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle

<u>Donc</u> ABDC est un rectangle

6) Calculer l'aire du rectangle ABCD et en déduire que l'aire du triangle ACD est égale à 17.

$$Aire_{ABCD} = AB \times BC = \sqrt{68} \times \sqrt{17} = \sqrt{1\,156} = 34$$

$$Aire_{ACD} = \frac{1}{2} Aire_{ABCD} = \frac{1}{2} \times 34 = 17$$

Donc l'aire de ABCD est de 34 u.a. l'aire de ACD est de 17 u.a.

7) La droite perpendiculaire à (AC) passant par D, coupe (AC) en E.
En vous servant de l'aire de ACD, déterminer la longueur DE.

$$Aire_{ACD} = \frac{AC \times DE}{2}$$

$$17 = \frac{\sqrt{85} \times DE}{2}$$

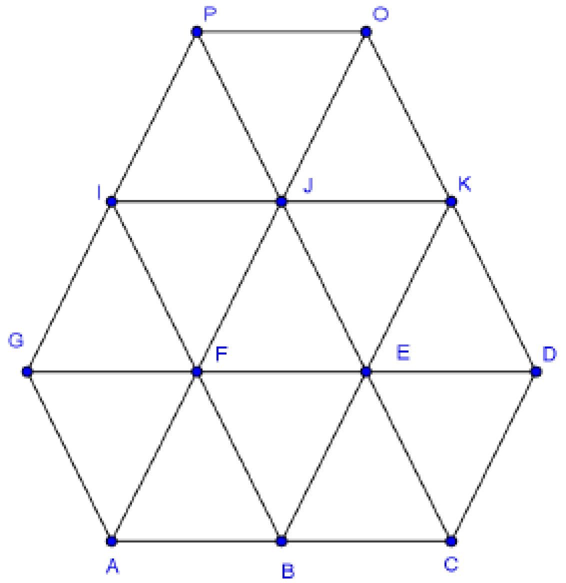
$$34 = \sqrt{85} \times DE$$

D'où $DE = \frac{34}{\sqrt{85}} = \frac{34\times\sqrt{85}}{\sqrt{85}\times\sqrt{85}} = \frac{34\sqrt{85}}{85} = \frac{17\times2\times\sqrt{85}}{17\times5} = \frac{2\sqrt{85}}{5}$

Donc $DE = \frac{2\sqrt{85}}{5}$

Exercice 8 **- 3 points -**

La figure ci-dessous est constituée de triangles isocèles de mêmes dimensions.



1. Donner un vecteur égal à $\overrightarrow{PE}$.

$$\overrightarrow{PE} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{JC}$$

2. Donner deux vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{FE}$.

$$-\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

3. Recopier sur la copie les égalités suivantes et compléter :

a) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{E..}$ $= \overrightarrow{EK}$

d'après la relation de Chasles

b) $\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{G..}$ $= \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GJ}$

c) $\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{KI} = \overrightarrow{\ldots}$ $= \vec{0}$

car ce sont deux vecteurs opposés.

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{\ldots}$ $= 2\,\overrightarrow{BC}$

puisque les deux vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont égaux.